תרגיל 4

1. מהי הכמות המינימלית של נקודות שצריך לסמן במישור, על מנת שמבין המרחקים בין הנקודות המסומנות יופיעו המספרים 1, 2, 4, 8, 16 ו-32?

תשובה. 7.

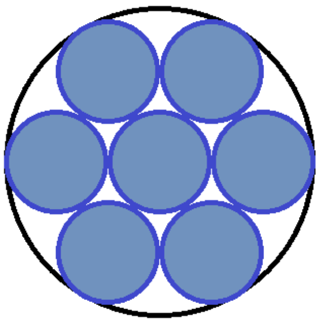
פתרון. קל לבנות דוגמאות אם 7 נקודות, למשל נסמן נקודות A ו-B במרחק 1, נסמן נקודה C במרחק 2 מאחת הנקודות, נסמן נקודה D במרחק 4 מאחת הנקודות שסומנו וכו'.

נוכיח שלא ניתן לסמן פחות מ-7 נקודות. ניקח את הנקודות שסומנו, וניצור מהם גרף: נעביר קטעים שאורכם 1, 2, 4 , ... ,32 בין הנקודות המסומנות, ונגיד שאלה קשתות של הגרף. בגרף זה אין מעגלים, כי בקו שבור סגור לא יתכן שקטע אחד גדול מסכום של קטעים אחרים (הרי קטע ישר הוא הדרך הקצרה בין הנקודות), וכל חזקה של 2 גדולה מסכום של כל החזקות הקטנות יותר.

אבל בגרף של n קשתות ללא מעגלים חייבים להיות לפחות $n+1$ קודקודים, בפרט בגרף שלנו שיש בו 6 קשתות ואין מעגלים חייבים להיות לפחות 7 קודקודים.

2. כמה צלחות שרדיוסיהן 10 ס"מ ניתן להניח על שולחן עגול שרדיוסו 30 ס"מ?

תשובה. 7.



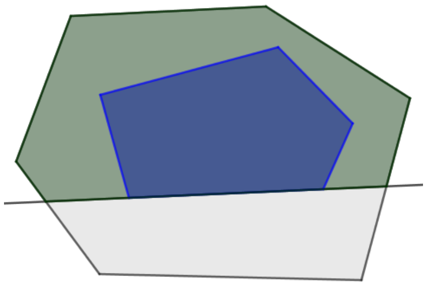
פתרון. קל למצוא דוגמה שאפשר להניח 7 צלחות.
החלק הקשה יותר זה להוכיח שאי-אפשר יותר.
מרכז העיגול צריך להיות בתוך מעגל שרדיוסו 20 ס"מ.
גם מרחק בין מרכזים של שתי צלחות זה לפחות 20 ס"מ.
לכן השאלה קשורה לשאלה כזאת: כמה נקודות ניתן לסמן בעיגול, כך שמרחק בין כל שתי נקודות מסומנות שווה לפחות לרדיוס.

נעביר דרך המרכז 3 קווים שיוצרים זוויות של 60° זה עם זה. הקווים מחלקים את העיגול ל-6 גזרות. מרחק בין כל שתי נקודות בגזרה קטן או שווה לרדיוס העיגול, שוויון יכול להתקיים רק אם נקודה אחת היא מרכז העיגול ושנייה היא על המעגל, או כאשר אלה שתי נקודות קצה של הקשת.

נסובב את הישרים כך שאף ישר לא יעבור דרך אף נקודה מסומנת חוץ מהמרכז (אם המרכז מסומן). אז בכל גזרה יכולה להיות רק נקודה מסומנת אחת חוץ מהמרכז. לכן יש לכל היותר 6 נקודות שהן לא המרכז, סה"כ 7 נקודות.

3. א. מצולע קמור A מוכל במצולע קמור B. האם בהכרח היקף של A קטן יותר מההיקף של B?

א. תשובה. כן.



פתרון ראשון. נעביר ישר שמכיל את אחד הצלעות של A. ישר זה יחתוך את B לשני חלקים: 'B ו-"B, כאשר 'B מכיל את A ו-"B זר ל-A.

נוכל להחליף את B ב-'B, ולהקטין את אורך ההיקף. בעצם, מבחינת היקף, החלפנו חלק של קו שבור בקטע ישר שבוודאי קצר יותר.

נוכל להמשיך ולעשות את זה לכל צלע של A, ולקטין את B שוב ושוב עד שהוא יהפוך ל-A, ואז ההיקף של A ושל מה שנשאר מ-B יהיה זהה. לכן מלכתחילה ההיקף של A היה יותר גדול.

פתרון שני. כאשר מטילים קטע I באורך ℓ ששיפוע שלו β לישר שהשיפוע שלו α מקבלים קטע שאורכו $\ell_\alpha = \left|\ell \cdot \cos(\alpha-\beta)\right|$. אם ננסה שיפועים שונים לישר שמטילים עליו, נקבל ערכים שונים, אבל באינטגרל נקבל $\int_0^{2\pi} \ell_\alpha \cdot d\alpha = \ell \cdot C$ כאשר C קבוע עולמי (שניתן לחשב במדויק, אבל אנחנו לא נזדקק לזה בפתרון).

כאשר מטילים מצולע קמור לישר ששיפוע שלו α, מקבלים קטע שאורכו L_α, שהוא בעצם מחצית של סכום ההיטלים של צלעות המצולע לישר נתון (מחצית כי כל נקודה מתקבלת מהטלה של שתי נקודות על ההיקף). לכן $\int_0^{2\pi} \ell_\alpha \cdot d\alpha = P \cdot \frac{C}{2}$, כאשר P הוא אורך ההיקף של המצולע.

אם יש מצולעים קמורים A ו-B שמוכלים אחד בשני, אז גם לאחר הטלה הראשון מוכל לשני, לכן לראשון יהיה אינטגרל יותר קטן, ולכן גם ההיקף שלו יותר קטן.

ב. תיבה T מוכלת בתיבה U (בתלת-מימד). האם סכום אורכי המקצועות של T קטן יותר מסכום אורכי המקצועות של U?

תשובה. כן.

פתרון ראשון. בדיוק כמו בפתרון השני של הסעיף הקודם. נבחר ישר ונטיל עליו את התיבה. ההטלה תהיה קטע, שהוא שווה לסכום ההטלות של 3 המקצועות בכיוונים שונים. נוכל להציב כל כיוון, ונוכל לעשות אינטגרל על משטחי קליפה כדורית; עבור כל קטע זה יהיה שווה לאורך הקטע כפול קבוע עולמי; עבור תיבה זה יהיה שווה לקבוע עולמי כפול סכום המקצועות. אם תיבה T מוכלת בתיבה U, אז T תיתן היטלים יותר ארוכים לכל ציר, וגם אינטגרל יותר גדול, לכן גם סכום המקצועות יותר גדול.

פתרון שני. לכל תיבה נגדיר R-סביבה – נקודות שנמצאות מהתיבה במרחק R לכל היותר. נסנן את אורכי מקצועות של תיבה מסוימת ב-a,b,c, וננסה לבטא את הנפח של R-סביבה. זה כולל את התיבה עצמה abc, ותיבות בעומק R ליד כל פאה – שביחד זה $R\cdot S$ כאשר S הוא השטח הכולל של כל הפאות, 12 רבעי גליל ליד המקצועות, באורך שזהה לאורך המקצוע, שזה ביחד שווה ל-$\pi R^2\cdot\left(a+b+c\right)$, ול-8 שמיניות כדור בפינות שזה $\frac{4}{3}\pi R^3$.

אם נסמן $a+b+c=\ell$ נקבל ביטוי $V=abc+S\cdot R+\pi\ell\cdot R^2+\frac{4}{3}\pi R^3$.

אם יש שתי תיבות, אחד מוכל בשנייה, אז גם R-סביבה של הראשונה מוכל ב-R-סביבה של השנייה. לכן הפולינום שמתקבל, לכל R חיובי, עבור התיבה הראשונה נותן ערך קטן יותר מאשר עבור התיבה השנייה. מקבלים אי-שוויון בין פולינומים, המונום המוביל הוא $\frac{4}{3}\pi R^3$ והוא מתקזז, לכן גם המונום השני צריך להיות לא יותר קטן עבור התיבה השנייה.

ג. ארבעון R מוכל בארבעון S. האם בהכרח סכום המקצועות של R קטן מסכום המקצועות של S?

תשובה. לא.

פתרון. למשל, ניתן לקחת ארבעון S שקודקודיו A, B, C קרובים זו לזו (מרחק של פחות מ-0.001) וקודקוד D במרחק בערך 1 מהם.

נבחר נקודות בתוכו, כך ש-E ו-F קרובות ל-D, ונקודות G ו-H קרובות לפאה ABC, שלא יהיו במישור אחד. אז הנקודות EFGH יוצרות ארבעון R שמוכל בארבעון S וסכום צלעותיו בערך 4, אבל סכום צלעותיו של S בערך 3.

4. ריבוע מחולק ל-10000 מלבנים על ידי 99 קווים אופקיים ו-99 קווים אנכיים. עבור איזה N מרבי בהכרח אפשר לבחור סדרה של N מלבנים מבין 10000 מלבנים אלה, כל שכל מלבן ניתן להכניס (באמצעות סיבובים והזזות) למלבן הבא בסדרה?
הבהרה: שני מלבנים חופפים יכולים להכיל זה את זה.

תשובה. 200.

פתרון. נסדר את העמודות בסדר עולה של עובי, ואת השורות בסדר עולה של גובה. יהיו אותם מלבנים, אבל בסדר אחר. נגיד שהעובי של המלבנים הוא $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{100}$, והגובה הוא $b_1\le b_2\le\ldots\le b_{100}$.

נרשום את המספרים בטבלה:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \end{matrix}$$

סכום בשתי השורות זהה, לכן לא יכול להיות שבכל עמודה המספר העליון כגול יותר, וגם לא להפך. אז יש שתי עמודות רצופות, למשל i ו-$i+1$ כך שמצד $a_i \le b_i$ ומצד שני $a_{i+1} \ge b_{i+1}$ (או להפך, אבל מה שחשוב שהכיוונים שונים). לכן המלבן $a_i \times b_{i+1}$ מוכל במלבן $a_{i+1} \times b_i$ לאחר סיבוב ב-90°. במלבנים אלה מוכלים גם המלבנים

$$a_1 \times b_1 ,\, a_1 \times b_2 ,\, ...,\, a_1 \times b_{i+1} ,\, a_2 \times b_{i+1} ,\, ... ,\, a_i \times b_{i+1}$$

וגם המלבנים $a_{i+1} \times b_i ,\, a_{i+2} \times b_i ,\, ...,\, a_{100} \times b_i ,\, a_{100} \times b_{i+1} ,\, ... ,\, a_{100} \times b_{100}$ שמוכלים גם זה בזה, וזו שרשרת של 200 מלבנים שמוכלים זה בזה.

נוכיח שלא תמיד אפשר יותר מ-200.

נניח כי

$$\begin{array}{llllllll} a_1 = 1 & a_2 = 1+2\varepsilon & ... & a_{50} = 1+98\varepsilon & a_{51} = 1+102\varepsilon & ... & a_{100} = 1+200\varepsilon \\ b_1 = 1+\varepsilon & b_2 = 1+3\varepsilon & ... & b_{50} = 1+99\varepsilon & b_{51} = 1+101\varepsilon & ... & b_{100} = 1+199\varepsilon \end{array}$$

כאשר ε הוא מספר חיובי.

נוסיף גם באמצע עמודה בעובי $a_{50.5} = 1+100\varepsilon$, גם אז לא תהיה שרשרת של יותר 200 מלבנים. אכן, אם לאחר שנכניס עמודה חדשה, נמספר עמודות שוב כך שמספרי עמודות יהיו מספרים שלמים, אז היקפים של מלבנים $a_i \times b_j$ עבורם $i+j$ זהה שווים. לכן לפי שאלה 3א מלבנים כאלה יכולים להכיל אחד את השני רק אף הם חופפים, אבל הם לא. מאותה סיבה, מלבן $a_i \times b_j$ יכול להכיל רק מלבנים עבורם $i+j$ קטן יותר. אבל הערכים האפשריים של $i+j$ אחרי שהוספנו עמודה הם לפחות $1+1$ ולכל היותר $100+101$ וזה רק 200 ערכים אפשריים, לכן השרשרת הכי ארוכה היא באורך 200.

5. נתון מצולע קמור P בעל n צלעות. נתבונן בכל המשולשים, שנוצרים מ-3 קודקודים שלו. משולש כזה נקרא מגניב עם כל הצלעות שלו שוות 1. מצאו את המספר המרבי של משולשים מגניבים (התשובה תלויה ב-n).

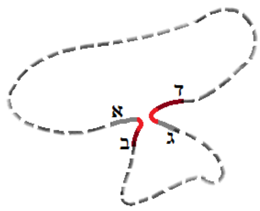
פתרון. שאלה זו היא קצת קשה, וההחלטתי לא לכתוב פתרון. החורפנים יבינו גם ככה, ולקופים זה קשה.

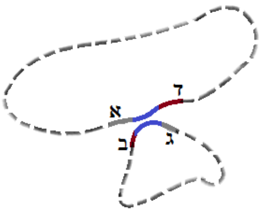
6. על גבי מפית משורטטים n מעגלים אשר כל שניים מהם נחתכים, ואף שלושה לא נחתכים באותה נקודה. טורבו החילזון זוחל לאורך המעגלים, ומשאיר אחריו שובל של כסף, באופן הבא: הוא מתחיל לנוע לאורך אחד המעגלים, עם כיוון השעון. בכל פעם שהוא מגיע לחיתוך עם מעגל אחר, הוא עובר לנוע לאורך המעגל החדש, והופך את מגמת התנועה שלו - כלומר, אם במעגל הקודם הוא זחל עם כיוון השעון, כעת הוא יזחל נגד כיוון השעון, ולהפך.

הוכיחו שאם בסוף התהליך כל המעגלים מכוסים לחלוטין בכסף, אזי n אי-זוגי.

פתרון ראשון. בכל צומת, אפשר להחליף הצטלבות בכבישים חד-משמעים, כאשר נחבר קשת של מעגל אחד עם כיוון השעון עם קשת של מעגל אחר נגד כיוון השעון. במקרה זה אוסף מעגלים שנחתכים יוחלף באוסף מסלולים סגורים. השאלה היא, מתי בעצם יש מסלול אחד בלבד.

אנחנו נחליף את זה בשאלה אחרת – מתי אוסף המסלולים המעגליים שמתקבלים מכיל מספר אי-זוגי של מעגלים. אנו נטען, שהתשובה תלויה בזוגיות של n.

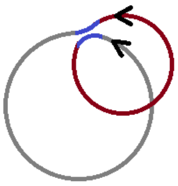




נחשוב מה קורה, כאשר אנחנו שוברים את החיבור שיצרנו בצומת מסוימת ומחברים הפוך. למשל אם ניתן ליציאות מהצומת שמות א', ב', ג', ד' בסדר מעגלי, אז נגיד שיש מסלול מחוץ לצומת שמחבר את א' ל-ד' ואת ג' ל-ב', אז כאשר אנחנו מחליפים את החיבור בצומת, נקבל קו אחד במקום שני קווים. יכול להיות גם מצב הפוך: שני קווים הופכים לקו אחד. בכל מקרה, החלפה בצומת משנה את הזוגיות של כמות הקווים.

קיים מספר זוגי של צמתים (כי כל שני מעגלים נותנים שניים או אפס צמתים), לכן אם נעשה החלפות מסוג זה בכל הצמתים נקבל אותה זוגיות של כמות המסלולים כמו בהתחלה. אנו נרצה לטעון, שאחרי שהחלפנו את כל החיבורים, לכמות המסלולים יש אותה זוגיות כמו ל-n.

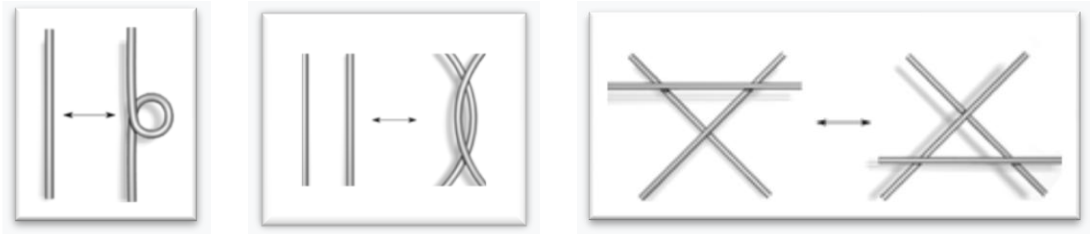
נניח שלטורבו יש מד-כיוון. כאשר טורבו עובר מסלול מעגלי שלא חותך את עצמו (גם אם זה לא מעגל מדויק), מד-כיוון עובר 2π, או -2π, תלוי בכיוון ההליכה. כאשר טורבו יעבור על כל הקשתות המעגליות נגד כיוון השעון, מד-כיוון יעבור 2π בכל מעגל. אבל במסלולים שציירנו, יש בנוסף גם את כל הפניות החדות.



אם אנחנו עוברים על כל הקשתות של המעגלים המקוריים נגד כיוון השעון, פנייה אחת בצומת היא מכיוון v לכיוון w, והפנייה האחרת היא מכיוון w לכיוון v, שני דברים אלה מתקזזים. לכן אם נעבור על כל המסלולים שנוצרים, כאשר עוברים על כל הקשתות נגד כיוון השעון, הפנייה הכוללת היא 2π כפול כמות המעגלים. מצד שני זה כמו לחבר $\pm 2\pi$ מספר פעמים ששווה לכמות המסלולים. אם נחלק ב-2π, ונבצע חשבון מודולו 2, נראה שכמות המעגלים שווה לכמות המסלולים מודולו 2.

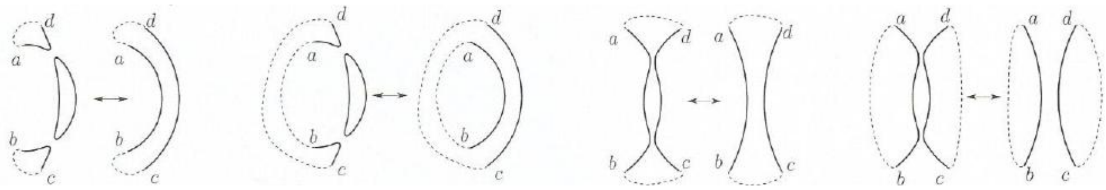
פתרון שני. הפתרון מבוסס על רעיונות מאינוואריאנטים של קשרים (knots), או יותר מדויק אינווריאנטים של סרטים (ribbons).

ניתן לחשוב על קשר בתור דיאגרמה מישורית, כאשר אפשר לעבור מקשר לקשר באמצעות מספר מהלכים מ-3 סוגים, קמו בציור:

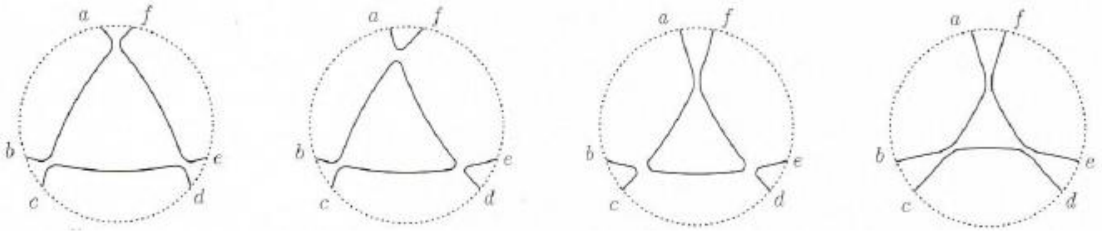


בסרטים, בניגוד לקשרים, מותר להשתמש רק בשני מהלכים (לא בשמאלי).

כמו בפתרון ראשון, נהפוך את הצטלבויות לחיבורים רגילים בהתאם לניסוח השאלה. ננסה לגרור את המעגלים, ונראה איך משתנה כמות החיבורים.
נבדוק את האפשרויות שיש במהלך מסוג שני:



(יש שתי אפשרויות, כאשר הקשתות מתעקמות באותו כיוון או בכיוונים הפוכים, ונראה שזוגיות של כמות הקווים נשמרת).
גם במהלך מסוג שלישי: סביב הנקודה שבה יפגשו 3 קשתות במצב מעבר יכולים להיות 0, 1, 2 או 3 קשתות קמורות, ובזמן המעבר קשתות קמורות הופכות לקשתות קעורות (מנקודת מבט של הנקודה באמצע, כמות הקווים נשארת זהה מודולו 2 בכל המקרים).



לכן כמות הקווים מודולו 2 לפני המהלך שווה לכמות הקווים מודולו 2 אחרי המהלך.

אם בהתחלה קיים קו אחד, ונגרור את כל המעגלים בכיוונים שונים על מנת להפריד אותם, נקבל בסוף n קווים. לכן בשביל שיהיה קו אחד צריך ש-n יהיה אי-זוגי.