תרגיל 3

1. המספרים a,b,c שונים מ-0, והמספרים ab,bc,ca רציונאליים.
א. הראו כי $a^2+b^2+c^2$ מספר רציונלי.
ב. הראו שאם $a^3+b^3+c^3$ מספר רציונלי, אז $a+b+c$ מספר רציונלי.

פתרון. א. המספר $a^2=\frac{(ab)\cdot(ca)}{bc}$ רציונלי, הרי הוא מכפלה של מספרים רציונליים.
באופן דומה גם b^2 וגם c^2.

ב. אם $a^2=n$ וגם הוא רציונלי, וכבר הבנו שהוא רציונאלי, אז $a=\sqrt{n}$. נסמן $ab=r$ אז $b=\frac{ab}{a}=\frac{r}{\sqrt{n}}=\frac{r}{n}\cdot\sqrt{n}$ כלומר $b=s\sqrt{n}$ כאשר s רציונלי. באופן דומה $c=t\sqrt{n}$ רציונלי. כאשר אומרים כי $a^3+b^3+c^3=\sqrt{n}\cdot n\left(1+s^3+t^3\right)$ רציונאלי, זה אומר כי $\sqrt{n}$ רציונאלי, או ש-$1+s^3+t^3=0$. האפשרות האחרונה לא יכולה להתקיים, כי אם נכפיל במכנה משותף נקבל $U^3+S^3+T^3=0$ ואז יש פתרון למשפט פרמה עבור חזקה 3, וזה לא קיים, אלה אם כן $s=0$ או $t=0$. אבל אז $b=0$ או $c=0$ וזה לא המצב.

לכן $\sqrt{n}$ רציונאל, ולכן a,b,c מספרים רציונליים, ולכן $a+b+c$ רציונלי.

2. הראו שמבין 504 הספרות הימניות של $1+50+50^2+50^3+50^4+...+50^{1000}$, כמות הפעמים שכל ספרה מופיע זו כפולה של 12.

פתרון. הביטוי הוא $\frac{50^{1001}-1}{49}$. לכן זה שווה ל-$-\frac{1}{49}\left(\mathrm{mod}\,10^{504}\right)$.

נבדוק, מה הוא הסדר של 10 מודולו 49. לפי משפט פרמה, $10^6=1\left(\mathrm{mod}\,7\right)$, לכן $10^6=7k+1$. לכן $10^{42}=(7k+1)^7=m\cdot(7k)^2+7\cdot7k+1=49n+1$.

כלומר הסדר של 10 מודולו 49 הוא מחלק של 42.

כלומר $10^{42\cdot k}-1$ חלקי 49 הוא מספר שלם. דרך אחרת להגיד את זה היא שהשבר העשרוני של $\frac{1}{49}$ הוא מחזורי, עם מחזור 42 (או מחזור קצר יותר שמחלק את 42).

אם נחשב את $\frac{1}{49}$, נקבל סדרה של 42 ספרות שחוזרת על עצמה. אם נחלק 10^{42k} ב-49 עם שארית, נקבל אותה סדרה של ספרות שחוזרת על עצמה k פעמים, ושארית 1. מכיוון ש-$42\cdot 12 = 504$, מקבלים שברישום של $\frac{10^{504}-1}{49}$ מופיעה אותה סדרה 12 פעמים ברצף, כלומר כמות הפעמים שכל ספרה מופיע מתחלקת ב-12.

נשווה את $\frac{10^{504}-1}{49}$ ל-$\frac{50^{1001}-1}{49}$. שני המספרים אלה שלמים. הפרש שלהם מתחלקת ב-10^{504}, לכן יש לשני המספרים אותן 504 ספרות ימניות.

3. מספרים רציונאליים a,b,c שונים בזוגות. האם $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ הוא רציונלי?

תשובה. כן.

פתרון.

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a-b}\right)^2=\sum_{cyc}\frac{1}{(a-b)^2}+2\sum_{cyc}\frac{1}{(a-b)(b-c)}=$$

$$=\sum_{cyc}\frac{1}{(a-b)^2}+2\frac{\sum_{cyc}(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\sum_{cyc}\frac{1}{(a-b)^2}$$

4. מספרים טבעיים m,n מקיימים $\frac{m}{n}\le\sqrt{23}$. הראו כי $\frac{m}{n}+\frac{3}{mn}<\sqrt{23}$.

פתרון. במילים אחרות נתון כי $m\le n\sqrt{23}$, צריך להראות כי $m+\frac{3}{m}<n\sqrt{23}$.

עוד דרך להגיד זאת: אם $m^2\le 23n^2$, צריך להראות כי $m^2+6+\frac{9}{m^2}<23n^2$.

נרצה להניח כי $m>3$, ואז נוכל לנסח את מה שצריך להוכיח בצורה: $m^2+6<23n^2$.

אכן, אם $m=1$ או $m=3$ נקבל $\frac{m}{n}+\frac{3}{mn}\le m+\frac{3}{m}=3+1=4<\sqrt{23}$, ואם $m=2$ אז $\frac{m}{n}+\frac{3}{mn}\le m+\frac{3}{m}=\frac{3}{2}+2=3.5<\sqrt{23}$, כלומר במקרים אלה הכול מתקיים.

ובכן, בהינתן $m^2\le 23n^2$, נרצה להראות כי $m^2+6<23n^2$.

קל לבדוק שמודולו 23 מתקיים

$$5^2=2\pmod{23}$$
$$7^2=3\pmod{23}$$
$$8^2=-5\pmod{23}$$

יחד עם זאת, -1 אינו ריבוע מודולו 23, כי לו הוא היה ריבוע, אז היה מספר שסדר הכפלי שלו 4, אבל אז לפי משפט פרמה הקטן 22 חייב להתחלק ב-4 והוא לא.

לכן $1,2,3,4,-5,6$ ריבועים מודולו 23, והשאריות $-1,-2,-3,-4,5,-6$ אינם ריבועים מודולו 23.

אם קיימים m,n שנוגדים את מה שצריך להוכיח, אז $23n^2-6\le m^2\le 23n^2$. כלומר m^2 הוא $23n^2-k$, כאשר $k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

אבל לפי מה שבדקנו, m^2 יכול להיות רק 0 או -5 מודולו 23 מבין האפשרויות האלו.
לא יתכן כי $m^2=23n^2$, הרי בפירוק לגורמים ראשוניים בצד שמאל 23 מופיע במעלה זוגית, ובצד ימין במעלה אי-זוגית.

לכן נשאר לדון במקרה בו $m^2=23n^2-5$. נבדוק משוואה זו מודולו 4 ונקבל:

$$m^2+(1-24)n^2=-4-1\pmod 4$$

$$m^2+n^2+1=0\pmod 4$$

וזה לא אפשרי.

5. מספרים שלמים מקיימים $3n+1=a^2$, $4n+1=b^2$. הוכיחו כי n מתחלק ב-56.

פתרון. מספיק להראות שהמספר מתחלק ב-8 וב-7. בשביל זה נרשום את כל הערכים האפשריים של n, של $3n+1$, ושל $4n+1$ גם מודולו 7 וגם מודולו 8. נזכור שמודולו 8 ריבוע הוא 0, 1 או 4, ומודולו 7 ריבוע הוא 0, 1, 2 או 4.

mod 7		
n	$3n+1$	$4n+1$
0	1	1
1	4	5
2	0	2
3	3	6
4	6	3
5	2	0
6	5	4

mod 8		
n	$3n+1$	$4n+1$
0	1	1
1	4	5
2	7	1
3	2	5
4	5	1
5	0	5
6	3	1
7	6	5

באדום סומנו השאריות שהם אינם ריבועים. רואים מהטבלה השמאלית, שאם גם $3n+1$ וגם $4n+1$, אז $n=0\pmod 8$, כלומר n בהכרח מתחלק ב-8. הטבלה הימנית פחות מצליחה: רואים רק, שהמספר הוא 0, 2 או 5 מודולו 7. היינו רוצים להסיק ש-0 היא השארית היחידה, אבל יתכן גם ש-$n=\pm2\pmod 7$, ובמקרה הזה אחד מבין a,b חייב להתחלק ב-7.

כעת ננסה גישה אחרת. $4a^2-3b^2=4(3n+1)-3(4n+1)=1$. אם נסמן $x=2a$ נקבל משוואה $x^2-3b^2=1$.

סוג זה של משוואות זו ידועה בשם "משוואת פל". הסבר מפורט על משוואות מסוג זה ניתן לקרוא בספרון http://taharut.org/articles/Pell.pdf, אבל אנחנו נסביר את מה שאנחנו צריכים. אם x,b שלמים אי-שליליים, הפתרון הקטן ביותר הוא $x=1,\ b=0$ והפתרון הבא הוא $x=2,\ b=1$.

ניתן לרשום את המשוואה בצורה: $1=\left(x+b\sqrt{3}\right)\left(x-b\sqrt{3}\right)$. ניתן ליצר אינסוף פתרונות כאשר פותחים סוגריים בביטוי $\left(2+\sqrt{3}\right)^m = x_m + b_m\sqrt{3}$ ואז כאשר מחליפים פלוס במינוס גם $\left(2-\sqrt{3}\right)^m = x_m - b_m\sqrt{3}$ ואז

$$x_m^2-3b_m^2=\left(x+b\sqrt{3}\right)\left(x-b\sqrt{3}\right)=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^m=1^m=1$$

אז ככה מקבלים הרבה פתרונות של המשוואה $x^2-3b^2=1$, אבל מסתבר שככה מקבלים גם את כל הפתרונות. אכן, העתקה

$$x+b\sqrt{3}\mapsto\left(x+b\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(2x+3b\right)+\left(2b+x\right)\sqrt{3}$$

מעבירה קשת $\left(x_{m-1},b_{m-1}\right),\left(x_m,b_m\right)$ לקשת $\left(x_m,b_m\right),\left(x_{m+1},b_{m+1}\right)$ של ההיפרבולה $x^2-3b^2=1$, וגם העתקה הפוכה

$$x+b\sqrt{3}\mapsto\left(x+b\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2x-3b\right)+\left(2b-x\right)\sqrt{3}$$

מעבירה קשת $\left(x_m,b_m\right),\left(x_{m+1},b_{m+1}\right)$ לקשת $\left(x_{m-1},b_{m-1}\right),\left(x_m,b_m\right)$. שתי ההעתקות מעבירות נקודות שלמות לנקודות שלמות, אז אם הייתה נקודה שלמה על ההיפרבולה בין $\left(x_m,b_m\right),\left(x_{m+1},b_{m+1}\right)$, אחרי מספר מהלכים מסוג זה היינו מקבלים נקודה שלמה עבורה $1<x<2$, וזה לא אפשרי.

ובכן מתקבל שפתרון המשוואה הוא $\left(2+\sqrt{3}\right)^m = x_m + b_m\sqrt{3}$.

נסתכל על המשוואה מודולו 2. נקבל כי $\sqrt{3}^m = x_m + b_m\sqrt{3}\left(\mathrm{mod}\,2\right)$, כלומר שעבור m זוגי x_m אי-זוגי, ועבור m אי-זוגי x_m הוא זוגי. במקרה שלנו $x=2a$, לכן $m=2k+1$. לכן

$$2a+b\sqrt{3}=x+b\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)^k$$

נסתכל על המשוואה הזאת מודולו 7.

$$2a+b\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^k\left(\mathrm{mod}\,7\right)$$

רואים שבכל המקרים $a \neq 0 \pmod 7$, וגם $b \neq 0 \pmod 7$, לכן השורות של $n=2$ ושל $n=5$ בטבלה שעשינו מודולו 7 לא רלוונטיות, ולכן n מתחלק ב-7.

ובכן, n מתחלק ב-7 וב-8, כלומר ב-56.

6. מצאו את כל הפתרונות השלמים למשוואה $x^2+12=y^3$.

פתרון. נבדוק שני מקרים בהתאם לזוגיות של x (שהיא זהה גם לזוגיות של y).

אם $x=2a$, $y=2b$ נקבל משוואה $4a^2+12=8b^3$, כלומר $a^2+3=2b^3$.

אז a בהכרח אי-זוגי, ואז $a^2=1 \pmod 8$ ולכן $2b^3=a^2+3=4 \pmod 8$.

כלומר $2b^3$ מתחלק ב-4 אבל לא ב-8, וזה לא יתכן (כי אז b זוגי, ואז $2b^3$ מתחלק אפילו ב-16.

אם x אי-זוגי, אז גם y אי-זוגי. נעביר את המשוואה לצורה

$$x^2+4=y^3-8=(y-2)\left(y^2+2y+4\right)$$

אז $y^2+2y+4=1+2=3 \pmod 4$, כלומר קיים ראשוני p שמחלק את y^2+2y+4 ומקיים $p=-1 \pmod 4$. אז גם $x^2+2^2=0 \pmod p$.

קיים מספר z עבורו $x=2z \pmod p$ ועבורו $z^2=-1 \pmod p$.

כלומר הסדר של z מודולו p הוא 4 (הרי הוא לא יכול להיות 2 או 1), כלומר לפי משפט הקטן של פרמה $p-1$ מתחק ב-4, אבל בחרנו את p כך ש-$p-1$ לא מתחלק ב-4.