

### תרגיל 3

1. שני מספרים טבעיים  $a$  ו- $b$  ומספר ראשוני  $p$  מקיימים משוואה  $a^2 - b^2 = p$ . האם בהינתן  $p$  ניתן לשחזר את  $a$  ו- $b$ ? אם כן, מצאו ביטוי מפורש ל- $a$  ול- $b$  באמצעות  $p$ . אם לא, מצאו דוגמא נגדית.

2. ראשוני  $p$  ראשוני גדול מ-5. הוכיחו שקיימים  $a, b, c$  שונים מבין  $1, 2, \dots, p-1$  כך ש:

$$\begin{cases} p \mid abc - 1 \\ p \mid a + b + c \end{cases}$$

3. א. הוכיחו שיש אינסוף ראשוניים  $p$  כך ש- $p+1$  מתחלק ב-4.

ב. הוכיחו שיש אינסוף ראשוניים  $p$  כך ש- $p+1$  מתחלק ב-5.

4. הראו שיש אינסוף שלשות  $(x, y, z)$  של מספרים רציונלים כך ש:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2.$$

5. נתון  $p$  ראשוני, מצאו עבור אילו  $a$  טבעיים:

$$p \mid 1^a + 2^a + 3^a + \dots + (p-1)^a.$$

6. לכל מספר טבעי  $n > 1$ , נסמן  $P(n)$  הראשוני הגדול ביותר שמחלק את  $n$ . הוכיחו שיש אינסוף שלשות  $(a, b, c)$  של מספרים טבעיים כך ש:

$$P(a^2 + 1) = P(b^2 + 1) = P(c^2 + 1).$$