# תרגיל 2

**1.** במשולש ABC נקודת מפגש הגבהים היא H, מרכז המעגל החסום הוא I ומרכז המעגל החוסם הוא O. הראו כי אם B, H, O, C נמצאים על מעגל אחד, אז גם I נמצא על אותו המעגל.

**פתרון.** נסמן $\alpha = \sphericalangle BAC$. אז $\sphericalangle BOC = 2\alpha$.

נחשב את $\sphericalangle BHC$. נגיש ש-BE, CF הם הגבהים. במרובע AEHF הזוויות E ו- F ישרות, הזווית A היא $\alpha$, לכן הזווית $\sphericalangle EHF = \pi - \alpha$. לכן $\sphericalangle BHC = \pi - \alpha$.

כלומר נתון כי $\pi - \alpha = \sphericalangle BHC = \sphericalangle BOC = 2\alpha$, לכן $\pi = 3\alpha$ לכן $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$.

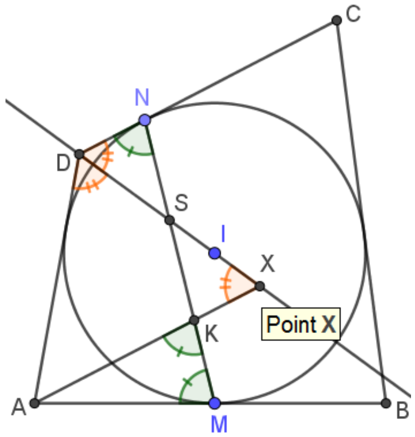
נחשב כעת את $\sphericalangle BIC$. אם נסמן $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ אז היות ו-BI, CI חוצי זוויות נקבל $\sphericalangle CBI = \dfrac{\beta}{2}$, $\sphericalangle ICB = \dfrac{\gamma}{2}$. לכן $\sphericalangle BIC = \pi - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2}$.

אבל $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, לכן אפשר לפשט: $\sphericalangle BIC = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi - \beta - \gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}$. במקרה שלנו $\alpha = 60^\circ$ נקבל $\sphericalangle BIC = \dfrac{\pi + \alpha}{2} = 120^\circ = \sphericalangle BOC$, כלומר גם נקודה I נמצאת על המעגל BOC.

**2.** נתון משולש ABC שאינו שווה-שוקיים ומלבן BCDE, כך שחוצה זוויות של BAC עובר דרך מרכז המלבן. מצאו את הזוויות בין אלכסון של המלבן BCDE לצלעותיו, בהינתן הזוויות של משולש ABC.

**פתרון.** נשתמש באותם סימונים: במשולש ABC הזווית A תסומן $\alpha$. מרכז המלבן שנסמן אותו ב-M נמצא על שני קווים ישרים: האנך האמצעי של BC (תמיד) וחוצה זווית של A (נתון). אנחנו יודעים שזה לא אותו קו (הם אפילו לא באותו כיוון, הרי המשולש אינו שווה-שוקיים). לכן אפשר להגדיר ביחידות את M לפי שני ישרים אלה. מצד שני, שני הישרים עוברים דרך אמצע הקשת BC של משולש ABC. לכן M הוא אמצע הקשת. לכן הזווית בין BC לבין BM נשענת על אותה קשת כמו הזווית $\sphericalangle MAC$. אבל הישר MA הוא חוצה זווית של A, לכן $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MAC = \dfrac{\alpha}{2}$. זו זווית בין האלכסון לצלע אחת. זווית בין אלכסון לצלע אחרת היא $\dfrac{\pi - \alpha}{2}$, הרי סכום של שתי הזוויות $\dfrac{\pi}{2}$.

**3.** נתון מרובע חוסם מעגל ABCD. נסמן את המעגל החסום ב-$\omega$ ואת מרכזו ב-$I$. נקודות ההשקה של הצלעות AB, DC עם $\omega$ יסומנו ב-M, N בהתאמה. נבחרה נקודה K על MN כך ש-$AM = AK$. הוכיחו כי ID חוצה את KN.




**פתרון.** נקודת מפגש של ID ו-NM תסומן S. שתי זוויות במשולש שווה-שוקיים שוות, ולכן $\sphericalangle AMK = \sphericalangle AKM$. זווית $\sphericalangle DNM$ נשענת על אותה הקשת כמו הזווית $\sphericalangle AMN$. זוויות אלה מסומנות בצבע ירוק בציור, ונסמן את גודלן ב-$\varphi$: $\sphericalangle DMN = \sphericalangle AMN = \sphericalangle AKM = \varphi$. מכאן גם רואים ש-AK מקביל ל-DC.
הישר DI הוא חוצה זווית של D.
נסמן $\sphericalangle NDI = \sphericalangle PDI = \delta$. נמשיך את AK עד החיתוך עם DI בנקודה X. היות ו-AX מקביל ל-CD, גם $\sphericalangle AXD = \delta$.

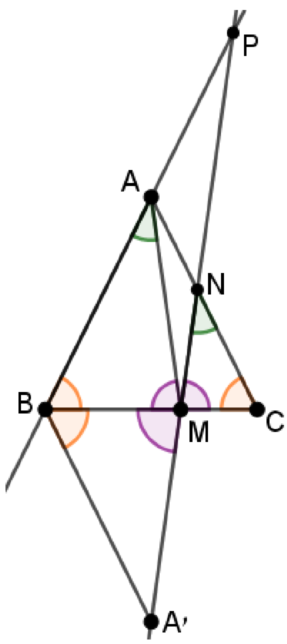
משולשים MAK ו-DAX שווי-שוקיים, כאשר זוויות הבסיס הם $\varphi$ ו-$\delta$ בהתאמה, לכן זוויות הראש (ב-A) הן $\pi - 2\varphi$, $\pi - 2\delta$ בהתאמה. לכן

$$\sphericalangle MAI = \tfrac{1}{2}\sphericalangle MAI = \tfrac{1}{2}\left(\pi - 2\varphi + \pi - 2\delta\right) = \pi - \varphi - \delta$$

מצד שני גם $\sphericalangle MSI = \sphericalangle KSX = \pi - \sphericalangle SKX - \sphericalangle SXK = \pi - \varphi - \delta$.

לכן S, I, A, M נמצאים על מעגל אחד. אבל $\sphericalangle IMA = \dfrac{\pi}{2}$, הרי המשיק מאונך לרדיוס.

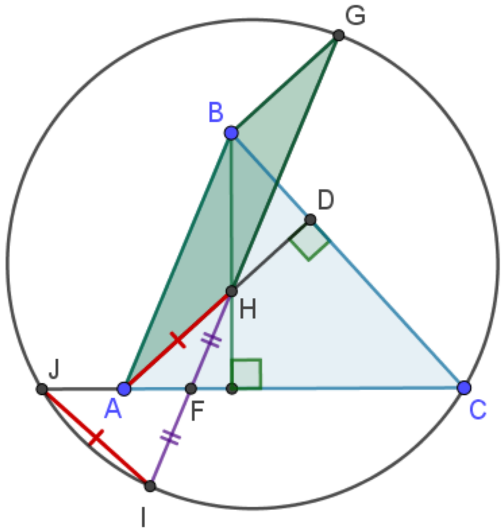
לכן IA הוא קוטר במעגל זה, לכן גם $\sphericalangle ISA = \dfrac{\pi}{2}$. כלומר, IS הוא גובה במשולש שווה-שוקיים DAX, לכן הוא גם התיכון ולכן $DS = SX$. לכן המשולשים DNS ו-XKS חופפים (זווית-צלע-זווית) ולכן $DS = KS$ מש"ל.




**4.** משולש ABC שווה שוקיים, $AC = AB$. נקודות M, N נבחרו על הצלעות BC, AC כך ש-$\sphericalangle BAM = \sphericalangle CNM$. החיתוך של MN עם AB יסומן ב-P. הוכיחו כי חוצה זווית $\sphericalangle BAM$ וחוצה זווית $\sphericalangle BPM$ נפגשים על BC.

**פתרון.** קל לראות שהמשולשים BAM ו-CNM דומים. לכן כדור ביליארד שיוצא מנקודה A ופוגע בקיר BC חוזר לכיוון נקודה N. אם נשקף את A ביחס ל-BC, נקבל נקודה A' על המשך הנקודה PNM. חוצה זווית של BAM וחוצה זווית של BA'M פוגשים את BM באותה נקודה, בגלל סימטריה. כלומר בעצם מבקשים להוכיח שחוצי זוויות של משולש BA'P נפגשים בנקודה אחת, וזה ידוע.

**5.** נתון משולש ABC, בו H מפגש הגבהים, ונקודה G כך ש-ABGH מקבילית. תהא I נקודה על GH כך ש-AC חוצה את HI. החיתוך של AC והמעגל החוסם של המשולש GCI יסומן ב-J. הוכיחו כי $AH = IJ$.




**פתרון.** נקודות H ו-I נמצאות במרחקים זהים לישר AC. לכן מספיק להראות שהקטעים AH ו-IJ יוצרות זוויות שוות עם הישר AC.

קל לראות כי הזווית בין AH ל-AC היא בעצם $\sphericalangle DAC$ והיא $90^\circ - \gamma$.

הזווית בין IJ ל-AC היא $\sphericalangle IJC$ והיא שווה ל-$\sphericalangle CGI$ שהיא בעצם $\sphericalangle CGH$.

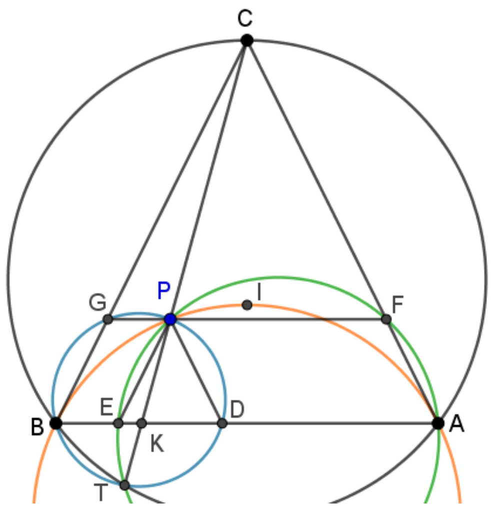
נבחר נקודה נוספת K כך ש-CHAK מקבילית. אז AK מקביל ושווה ל-HC. כמו כן, AB מקביל ושווה ל-HG. לכן המשולש CHG חופף למשיל KAB, כלומר במקום לחשב את $\sphericalangle CGH$ מספיק לחשב את $\sphericalangle KBA$.

הקטעים KA ו-KC מקבילים לגבהים של משולש ABC לכן הם מאונכים לצלעות שלו AB ו-BC בהתאמה. לכן הזוויות $\sphericalangle KAB$ ו-$\sphericalangle KCB$ ישרות. לכן מעגל שקוטרו BK עובר דרך A ודרך C. לכן $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB = \gamma$.

לכן $\sphericalangle KBA = 90^\circ - \sphericalangle AKB = 90^\circ - \gamma$, הרי $\sphericalangle KAB$ זווית ישרה.

ובכן, $\sphericalangle CGI = \sphericalangle KBA = 90^\circ - \gamma = \sphericalangle HAC$, וזה הדבר שרצינו להוכיח.

**6.** משולש ABC שווה שוקיים, $AC = BC$. מרכז המעגל החוסם ב-ABC יסומן I. נבחר נקודה על המעגל ABI שנמצאת בתוך המשולש ABC ונסמן אותה ב-P. הישרים המקבילים ל-AC, BC דרך P חותכים את AB ב-D, E בהתאמה. הישר המקביל ל-AB דרך P חותך את AC, BC ב-F, G בהתאמה. הוכיחו כי FD ו-GE נחתכים על המעגל החוסם של ABC.




**פתרון.** PEAF טרפז שווה-שוקיים, לכן הוא חסום במעגל (ירוק), וכך גם PDBF (מעגל כחול).

הישר CP עד לנקודת המפגש הנוספת עם המעגל החוסם של ABC בנקודה T.

משולש ABC שווה-שוקיים, נסמן במשולש זה זוויות $\sphericalangle A = \alpha = \sphericalangle B$.

$\sphericalangle PTA = \sphericalangle CTA = \sphericalangle CBA = \alpha = \sphericalangle PEA$

לכן T נמצא על המעגל הירוק, באופן דומה רואים כי T נמצא גם על המעגל הכחול. לכן

$$\sphericalangle ETD = \sphericalangle ETP + \sphericalangle PTD = \sphericalangle EAP + \sphericalangle PBD = \pi - \sphericalangle APB.$$

נזכר ש-P נמצא על המעגל AIB (כתום) ולכן

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AIB = \pi - \sphericalangle IAB - \sphericalangle IBA = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \pi - \alpha$$

לכן $\sphericalangle ETD = \pi - \sphericalangle APB = \alpha$ .

מצד שני, לפי המעגל הירוק, $\sphericalangle ETF = \sphericalangle EAF = \alpha$ .

לכן $\sphericalangle ETD = \sphericalangle ETF$ , כלומר T, D ו-F על ישר אחד.

באופן דומה מוכיחים ש-T, E ו-G על ישר אחד. לכן FD ו-GE נחתכים בנקודה T על המעגל החוסם של ABC.