תרגיל 1

1. נתונה קבוצה A של 101 מספרים שלמים בין 1 ל-1000000. הראו שקיימים 100 מספרים שונים $a_1, a_2, ..., a_{100}$ בין 1 ל-1000000, כך שהקבוצות $a_i + \mathrm{A}$ כולן זרות.

פתרון. נספור כמה מספרים נוספים אנחנו אוסרים לבחור כאשר בוחרים מספר נוסף.

נניח שבחרנו כבר $x_1, x_2, ..., x_k$ מספרים ורוצים לבחור עוד 1. נספור כמה מספיר אסור לנו לבחור, אסור לבחור את כל המספרים מהסוג $x_i + a_j - a_l$ כאשר $1 \le i \le k$, וזה כל מה שאסור לנו לבחור. כלומר אסור לבחור $k \cdot 101 \cdot 100$ מספרים כאשר $l \neq j$ ועוד k מספרים כאשר $j = l$ כלומר אסור לנו לבחור לכל היותר $99 \cdot 101 \cdot 100 + 99 = 999999$ מספרים ולכן ניתן לבחור 100 מספרים כפי שנדרש.

שיפור. אפשר לשפר את ה-100 ולהוכיח שאפשר לבחור יותר מספרים.

נשים לב שאם כל פעם במקום לבחור את x_k בצורה אקראית כל פעם נבחר את המספר הכי קטן שאפשר לבחור אז נצטרך לספור את המספרים מהסוג $x_i + a_j - a_l$ אבל רק כאשר $a_j \ge a_l$ כי המספרים עבורם $a_j < a_l$ כולם קטנים מ-x_k ולכן נפסלו כבר לפני. כלומר בשלב ה-k פסלנו $k \cdot 101 \cdot 50 + k = 5051k$ ולכן ניתן לבחור מספרים כל עוד $k \le \frac{1000000}{5051}$ כלומר ניתן לבחור 198 מבפרים.

2. בעיגול שרדיוסו 16 סומנו 650 נקודות. האם ניתן לצבוע טבעת עם רדיוס פנימי 2 ורדיוס חיצוני 3 כך שבטבעת יהיו לפחות 10 נקודות מסומנות?

פתרון. נעשה "דואליות", במקום לחפש טבעת במכילה 10 נקודות מסומנות מעביר סביב כל נקודה מסומן מעגל ונחפש נקודה הנמצאת ב-10 טבעות ואז אם נצייר טבעת סביב הנקודה הזו ובטבעת יהיו 10 נקודות מסומנות.

שטח של כל טבעת שווה $5 = 3^2 - 2^2$. השטח הכולל של כל הטבעות שווה $650 \cdot 5 = 3250$. כל הטבעות נמצאות במעגל עם רדיוס $16 + 3 = 19$ כי אם נקודה מסומנת נמצאת על גבול המעגל עם רדיוס 16 אז הטבעת עם מרכז בנקודה יוצאת 3 החוצה מהמעגל, כלומר כל הטבעות כלואות בצורה עם שטח $19^2 = 361$. נשים לב ש-$361 \cdot 9 = 3249$ ולכן לפי עקרון שובח היונים יש נקודה המכוסה על ידי לפחות 10 טבעות.

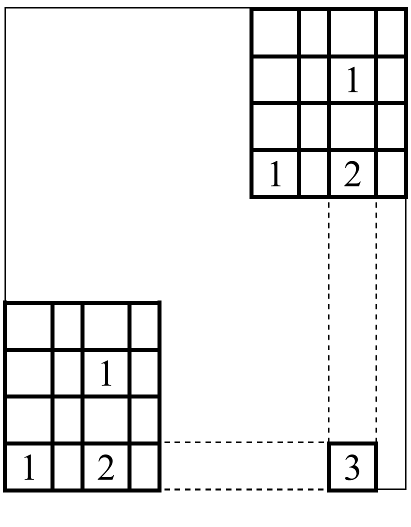
3. נתונים שני מעגלים עם היקף 100 כל אחד. על המעגל הראשון סומנו 100 נקודות ועל המעגל השני סומנו מספר קשתות כך שאורכן הכולל קטן מ-1. האם ניתן לשים את שני המעגלים זה על זה כך שאף נקודה מסומנת לא תהיה על אף קשת מסומנת?

פתרון. נשים את שני המעגלים זה על זה בצורה כלשהי, ליד שני המעגלים נושב פועל ונתחיל לסובב את אחד המעגלים בזמן שהשני ישער קבוע. נגיד לפועל לצבוע את הנקודה הנמצאת מולו בכל רגע שבו יש נקודה מסומנת על קשת מסומנת. אנחנו רוצים להוכיח שלאחר שנעשה סיבוב שלם תשער נקודה לא צבועה, כלומר שהיה רגע שבו אף נקודה מסומנת לא היתה על אף קשת מסומנת.

העבודה שנתנו לפועל קשה מדי ולכן הוא מבקש שנקל עליו ובמקום לצבוע כל פעם שאחת הנקודות על קשת מסומנת נעשה סיבוב אחד והוא יצבע כל פעם שהנקודה הראשונה נמצאת על קשת מסומנת ואז נעשה עוד סיבוב והוא יצבע כל פעם שהנקודה השנייה נמצאת על קשת מסומנת וכך הלאה עד שנעשה 100 סיבובים. נשים לב שבכל סיבוב העורך הכולל שהפועל יצבע יהיה קטן מ-1 ולכן ב-100 סיבובים הוא יצבע בסך הכל פחות מ-100 ולכן תעשר נקודה לא צבועה וזה בדיוק מה שרצינו.

4. קדקודיו של דף משבצות אינסופי נצבעו בשלוש צבעים. האם קיים משולש מונוכרומטי ישר זווית ושווה שוקיים?

פתרון. לשם נוחות נגיד שהמשבצות נצבעו, נצבע כל משבצת בצבע של הפינה השמאלית התחתונה שלה. נבחר ריבוע 4×4, באלכסון שלו יש 4 משבצות ולכן יש שתיים בצבע זהה, ללא הקבלת הכלליות נגיד ששתיהן אדומות. מכאן נובע שהמשבצת שמשלימה את שתי המשבצות האלה למשולש ישר זווית ושווה שוקיים לא יכולה להיות אדומה, ללא הקבלת הכלליות נניח שהיא ירוקה. נבחר ריבוע גדול מאוד, בגודל $n\times n$, כך שבאלכסון שלו יהיו שני ריבועים בגודל 4×4 הצבועים באופן זהה (n גדול מריבוע קמות האפשרויות לצבוע ריבוע 4×4בשלוש צבעים), ללא הקבלת הכלליות נניח ששניהם צבועים כמו הריבוע 4×4 שדיברנו עליו מקודם. כפי שכבר אמרנו בכל אחד משני הריבועים האלה יש שתי משבצות אדומות ומשבצת ירוקה ולכן המשבצת שמשלימה את שתי המשבצות הירוקות למשולש ישר זווית ושווה שוקיים לא יכולה להיות ירוקה אבל היא לא יכולה להיות אדומה כי אז היא תשלים שתי נקודות אדומות למשולש שווה שוקיים וישר זווית ולכן היא חייבת להיות ירוקה (רעה ציור).



באופן דומה נבחר ריבוע גדול מאוד מאוד, בגודל $k\times k$, כך שבאלכסון שלו שיהיו שני ריבועי בגודל $n\times n$ הצבועים באופן זהה ואז תהיה נקודה שלא יכולה להיות צבועה באף צבע.

5. נתונה חפיסה של 8 קלפים. על כל קלף כתוב מספר שלם. הוכח שניתן לחלק חלק מהקלפים ליוסי ודנה כך שכל אחד מהם יקבל אותו מספר קלפים, וההפרש בין סכום מספרי הקלפים של יוסי לבין סכום מספרי הקלפים של דנה מתחלק ב-67.

פתרון: יש $\binom{8}{4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2}=70>67$ אפשרויות לבחור 4 קלפים מהחפיסה ולכן יש שתי רביעיות של קלפים שסכום המספרים הרשומים על הקלפים זהים מודולו 67. נתבונן בשתי הרביעיות ונוריד משתיהן את הקלפים המשותפים, נשים לב שקיבלנו שתי קבוצות זרות של קלפים, בגודל זהה והסכומים של שתי הרביעיות זהים מודולו 67 וזה בדיוק מה שביקשו מאיתנו לעשות.

6. באולימפיאדה במתמטיקה השתתפו 21 בנים ו-21 בנות. כל אחד פתר לכל היותר 6 שאלות ועבור כל זוג בן-בת יש לפחות שאלה אחת ששניהם פתרו. הוכח כי יש שאלה שלפחות 3 בנים ו-3 בנות פתרו.

פתרון: ננסח את השאלה מחדש.

בכל משבצת של טבלה בגודל 21×21 רשום מספר שלם (מספר השאלה). בכל שורה וכל עמודה יש לכל היותר 6 ספרים שונים. הוכח כי קיים מספר הרשום לפחות ב-3 שורות ו-3 עמודות.

השורות זה הבנות העמודות זה הבנים והמספרים זה מספרי השאלה ששניהם פתרו.

נניח שאין מספר שמופיע ב-3 עמודות ו-3 שורות לכן יש ללא הקבלת הכלליות יש לפחות $221=\left\lceil\frac{441}{2}\right\rceil$ שאלות (מספרים) שלכל היותר שני בנים פתרו (מופיעות בלכל היותר 2 שורות), נקרא לשאלות האלה קשות. יש 21 שורות ולכן ישר שורה שיש בה לפחות $11=\left\lceil\frac{221}{21}\right\rceil$ שאלות קשות. כל שאלה קשה פתרו לכל היותר שני בנים ולכן מ-11 השאלות הקשות יש לפחות $6=\left\lceil\frac{11}{2}\right\rceil$ שאלות שונות אבל הבת הזו (בשורה הזו) פתרה לכל היותר 6 שאלות שונות ובשער 10 המשבצות לא יכולות להיות רשומות אותן 11 שאלות קשות כי זה יסטור את זה שהן קשות ולכן הגענו לסתירה.