תרגיל 1

1. מספרים חיוביים a,b,c,d, מקיימים $a^3+b^3+c^3+d^3\ge 3$ וגם $a^5+b^5+c^5+d^5\le 5$. הראו כי $a+b+c+d\ge\frac{3}{2}$.

פתרון. לפי אי-שוויון קושי-שוורץ

$$\left(a+b+c+d\right)\left(a^5+b^5+c^5+d^5\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$$

לכן, $5\left(a+b+c+d\right)\ge 3^2$, כלומר $a+b+c+d\ge\frac{9}{5}>\frac{3}{2}$.

2. צלעות המשולש a,b,c ואורכי התיכונים המתאימים m_a,m_b,m_c. הראו כי

$$\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\ge\frac{3\left(m_a+m_b+m_c\right)}{a+b+c}\ .$$

פתרון. נוכיח כי כמה שהצלע גדולה יותר, ככה התיכון קטן יותר. נתבונן במשולש ABC שתיכוניו נפגשים בנקודה M. נניח כי $\mathrm{BC}=a>b=\mathrm{AC}$, כלומר ביחס לאנך האמצעי של הקטע AB, הנקודה C נמצאת בצד של A. גם M נמצאת בצד של B, כי היא על הקטע שמחבר את C עם אמצע AB. לכן $\frac{2}{3}m_a=\mathrm{MA}>\mathrm{MB}=\frac{2}{3}m_b$.

לכן הסדרות $\left(m_a,m_b,m_c\right)$ ו-$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ מסודרות באותו אופן, וניתן להישתמש באי-שוויון צ'בישוב, וזה משלים את ההוכחה.

3. עבור $a\ge 1,b\ge 1,c\ge 1$ המקיימים $a+b+c=2abc$, הוכיחו כי

$$\sqrt[3]{\left(a+b+c\right)^2}\ge\sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{ac-1}+\sqrt[3]{bc-1}.$$

פתרון. נעשה הומוגניזציה: נשתמש בנתון על מנת שכל המחוברים יהיו מאותה דרגה. צריך להוכיח כי

$$\sqrt[3]{\left(a+b+c\right)^2}\ge\sum_{cyc}\sqrt[3]{ab-\frac{2abc}{a+b+c}}$$

נכפיל את שני האגפים ב-$\sqrt[3]{a+b+c}$ ונעבור ל-

$$a+b+c\ge\sum_{cyc}\sqrt[3]{a^2b+ab^2-abc}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a+b+\left(a+b-c\right)}{3}\ge\sum_{cyc}\sqrt[3]{ab\left(a+b-c\right)}$$

זה יכול להתקבל מיידית מאי-שוויון הממוצעים, אם a,b,c הן צלעות המשולש.

הבעיה היא שיתכן למשל ש- $a+b<c$ ואז $a+b-c$ שלילי, ולא ניתן להשתמש באי-שוויון הממוצעים. אבל $a+b+c=2abc$, לכן $a+b=(2ab-1)c$, ואז

$\frac{a+b}{2ab-1}=c>a+b$. המחנה $2ab-1$ חיובי, לכן $1>2ab-1$, לכן $1>ab$. אבל נתון כי $a\geq 1,b\geq 1,c\geq 1$.

4. עבור מספרים חיוביים a,b,c הראו כי

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{16}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{16}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+a^3}{16}}\,.$$

פתרון ראשון.

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+b}-\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{16}}=\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a}{2}\right)-\sum_{cyc}\left(\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{16}}-\frac{a+b}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\frac{(a-b)a}{a+b}-\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}-(a+b)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\frac{(a-b)a}{a+b}-\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{4(a^3+b^3)-(a+b)^3}{\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}^2+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}(a+b)+(a+b)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\left(\frac{(a-b)a}{a+b}-\frac{a-b}{2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{3(a+b)(a-b)^2}{\ldots}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{a+b}-\sum_{cyc}\frac{3(a+b)(a-b)^2}{\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}^2+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}(a+b)+(a+b)^2}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{4}\left(\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{a+b}-\sum_{cyc}\frac{3(a+b)(a-b)^2}{(a+b)^2+(a+b)^2+(a+b)^2}\right)=0$$

פתרון שני. נשים לב כי אגף שמאל בעצם סימטרי, הרי

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+b}-\sum_{cyc}\frac{b^2}{a+b}=\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}=\sum_{cyc}(a-b)=0$$

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+b}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{1}{12}\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2+(a+b)^2+4(a^2-ab+b^2)}{a+b}\geq$$

$$\overset{(\text{AM-GM})}{\geq}\frac{1}{4}\sum_{cyc}\frac{\sqrt[3]{4(a+b)^4(a^2-ab+b^2)}}{a+b}=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}$$

5. עבור מספרים אי-שליליים $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ הראו כי

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{a_ia_j,b_ib_j\}\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{a_ib_j,b_ia_j\}$$

פתרון. ההוכחה מתבססת על שתי טענות:

טענה 1. אם $x_1,...,x_n$ מספרים ממשיים, $r_1,...,r_n$ מספרים אי-שליליים, אז

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{r_i,r_j\}\cdot x_i\cdot x_j\geq 0.$$

טענה 2. מתקיים $\min\{a_ib_j,b_ia_j\}-\min\{a_ia_j,b_ib_j\}=\min\{r_i,r_j\}\cdot x_ix_j$ כאשר

$$r_i=\frac{\max\{a_i,b_i\}}{\min\{a_i,b_i\}}-1$$

$$x_i=\operatorname{sgn}(a_i-b_i)\cdot\min\{a_i,b_i\}$$

בהינתן שתי הטענות השאלה נפתרת בקלות, אכן המספרים r_i בטענה 2 בבירור אי-שליליים, ולכן לפי הטענות מקבלים

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\min\{a_ib_j,b_ia_j\}-\min\{a_ia_j,b_ib_j\}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{r_i,r_j\}\cdot x_i\cdot x_j\geq 0$$

וזה מה שצריך להוכיח. נשאר להראות את שתי הטענות.

הוכחת טענה 1. הטענה סימטרית באינדקסים, לכן בשביל ההוכחה ניתן להניח כי $r_1\leq r_2\leq r_3\leq...\leq r_n$.

אז $\min(r_i,r_j)=r_{\min(i,j)}$. מכאן

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{r_i,r_j\}\cdot a_i\cdot a_j=$$

$$=r_1\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\cdot a_j+(r_2-r_1)\cdot\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_i\cdot a_j+(r_3-r_2)\cdot\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n}a_i\cdot a_j+...=$$

$$=r_1\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\sum_{k=2}^{n}(r_k-r_{k-1})\left(\sum_{i=k}^{n}a_i\right)^2\geq 0$$

הרי זה סכום של ריבועים עם מקדמים אי-שליליים.

הוכחת טענה 2. נשתמש בזהויות $\max\{x,y\}-\min\{x,y\}=|x-y|$

$\operatorname{sgn}(x)\cdot|x|=x$. מתקיים

$$\min\{r_i,r_j\}\cdot x_ix_j=\min\left\{\frac{\max\{a_i,b_i\}}{\min\{a_i,b_i\}}-1,\ \frac{\max\{a_j,b_j\}}{\min\{a_j,b_j\}}-1\right\}\cdot$$

$$\cdot\operatorname{sgn}(a_i-b_i)\cdot\min\{a_i,b_i\}\cdot\operatorname{sgn}(a_j-b_j)\cdot\min\{a_j,b_j\}=$$

$$=\min\Big\{\big(\max\{a_i,b_i\}-\min\{a_i,b_i\}\big)\min\{a_j,b_j\},$$

$$\big(\max\{a_j,b_j\}-\min\{a_j,b_j\}\big)\min\{a_i,b_i\}\Big\}\cdot\operatorname{sgn}(a_i-b_i)\operatorname{sgn}(a_j-b_j)=$$

$$=\min\Big\{|a_i-b_i|\min\{a_j,b_j\},|a_j-b_j|\min\{a_i,b_i\}\Big\}\cdot\operatorname{sgn}(a_i-b_i)\operatorname{sgn}(a_j-b_j)$$

צריך להראות שזה שווה ל- $\min\{a_ib_j,b_ia_j\}-\min\{a_ia_j,b_ib_j\}$.
ניתן להניח כי $a_ia_j\le b_ib_j$, הרי אם נחליף בין a ל-b ששני הביטויים יישארו אותו דבר.
במקרה זה חייב שיתקיים $a_i<b_i$ או $a_j<b_j$, או גם וגם, אבל ניתן להניח כי $a_i<b_i$.
יכול להיות שגם בנוסף (א) $a_j<b_j$, ויכול להיות (ב) $a_j\ge b_j$, או (ג) $a_j>b_j$.
(המקרה שגם $a_i=b_i$ דומה למקרה ב'). נבדוק את כל המקרים.

(א) אם $a_j<b_j$ וגם $a_i<b_i$ אז הביטוי הראשון

$$\min\Big\{|a_i-b_i|\min\{a_j,b_j\},|a_j-b_j|\min\{a_i,b_i\}\Big\}\cdot(-1)^2=$$

$$=\min\big\{(b_i-a_i)\cdot a_j,(b_j-a_j)\cdot a_i\big\}=\min\{b_i\cdot a_j,b_j\cdot a_i\}-a_ia_j$$

והביטוי השני אותו דבר.

(ב) אם $a_j=b_j$ אז הביטוי הראשון $\pm\min\{0,0\}=0$, והשני

$$\min\{a_ia_j,b_ia_j\}-\min\{a_ia_j,b_ia_j\}=0$$

וזה אותו דבר.

(ג) אם $a_j>b_j$ וגם $a_i<b_i$ אז הביטוי הראשון הוא

$$\min\Big\{|a_i-b_i|\min\{a_j,b_j\},|a_j-b_j|\min\{a_i,b_i\}\Big\}\cdot(-1)=$$

$$=-\min\big\{(b_i-a_i)b_j,(a_j-b_j)a_i\big\}=-\big(\min\{b_ib_j,a_ia_j\}-a_ib_j\big)=$$

$$=a_ib_j-\min\{b_ib_j,a_ia_j\}$$

והביטוי השני אותו דבר.

6. הראו כי $\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le 4$ לכל $x>0$.

פתרון. נגדיר פונקציה $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{1+\frac{1}{x}}$. אז צריך להראות

$$\frac{1}{1+x}\cdot f\left(x\right)+\frac{x}{1+x}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\le 2f\left(\frac{x}{1+x}+\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{x}\right)=2f\left(1\right)=4$$

כלומר אי-שוויון ינסן עבור פונקציה קעורה f.

נשאר לוודא כי הפונקציה f כעורה (אנו משתמשים בסימון כאשר $\exp\left(z\right)=e^{z}$)

$$f''\left(x\right)=\left(\exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+x\right)\right)\right)''=$$

$$=\left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+x\right)\right)'\cdot\exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+x\right)\right)\right)'=$$

$$=\left(\left(-\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^{2}}+\frac{1}{x}\right)\cdot\exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+x\right)\right)\right)'=$$

$$=\left[\left(-\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^{2}}+\frac{1}{x}\right)'+\left(-\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^{2}}+\frac{1}{x}\right)^{2}\right]\cdot\exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+x\right)\right)$$

כאן $\exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+x\right)\right)$ הוא גורם משותף חיובי, לכן חשוב לנו הסימן של

$$f''\left(x\right)\Big/\exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+x\right)\right)=\left(-\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^{2}}+\frac{1}{x}\right)'+\left(-\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^{2}}+\frac{1}{x}\right)^{2}=$$

$$=\left(-\frac{1}{x^{2}\left(1+x\right)}+2\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^{3}}-\frac{1}{x^{2}}\right)+\left(\frac{\ln^{2}\left(1+x\right)}{x^{4}}-2\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^{3}}+\frac{1}{x^{2}}\right)=$$

$$=\frac{\ln^{2}\left(1+x\right)-\dfrac{x^{2}}{1+x}}{x^{4}}$$

ובכן, על מנת להראות שהפונקציה קעורה, צריך להוכיח כי $\ln^{2}\left(1+x\right)\le\frac{x^{2}}{1+x}$, במילים אחרות $\ln\left(1+x\right)\le\frac{x}{\sqrt{1+x}}$. אם נסמן $y=\sqrt{1+x}-1$, וצריך לזכור כי $y>0$ אז מספיק להראות כי

$$2\ln(1+y) \le \frac{(1+y)^2 - 1}{1+y}$$

$$2(1+y)\ln(1+y) \le 2y + y^2$$

$$0 \le 2y + y^2 - 2(1+y)\ln(1+y)$$

כאשר $y=0$, הביטוי מתאפס. נגזור את $g(y) = 2y + y^2 - 2(1+y)\ln(1+y)$:

$$g'(y) = 2 + 2y - 2\ln(1+y) - 2 = 2\left(y - \ln(1+y)\right)$$

אבל $y \ge \ln(1+y)$, הרי $\ln$ קעור ונמצא מתחת למשיק.