תרגיל 10

בכל השאלות הבאות יש למצוא את כל הפונקציות המקיימות את המשוואה.
הפונקציה היא מהממשיים לממשיים אלה אם נאמר אחרת.

1. $f\left(x^3\right)+f\left(y^3\right)=(x+y)\left(f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right)-f(xy)\right)$.

פתרון: נציב $x=y=0$ ונקבל ש- $2f(0)=0$ ולכן $f(0)=0$.

עכשיו אם נציב רק $y=0$ אז נקבל:

$$f\left(x^3\right)=x\cdot f\left(x^2\right) \qquad (1)$$

מהמשוואה הזו נקבל שתי מסקנות, הראשונה היא שהפונקציה אי-זוגית, זה נובע מכך שאם נחליף סימן ל-x ב-(1) אז נקבל:

$$f\left(-x^3\right)=-x\cdot f\left(x^2\right)=-f\left(x^3\right)$$

והשנייה היא שהמשוואה המקורית הופכת ל-

$$x\cdot f\left(x^2\right)+y\cdot f\left(y^2\right)=x\cdot f\left(x^2\right)+y\cdot f\left(y^2\right)+$$
$$+x\cdot f\left(y^2\right)+y\cdot f\left(x^2\right)-x\cdot f(xy)-y\cdot f(xy)$$

כלומר:

$$x\cdot f\left(y^2\right)+y\cdot f\left(x^2\right)=x\cdot f(xy)+y\cdot f(xy) \qquad (2)$$

נשנה סימן ל-y ב-(2) ונקבל:

$$x\cdot f\left(y^2\right)-y\cdot f\left(x^2\right)=-x\cdot f(xy)+y\cdot f(xy) \qquad (3)$$

נחבר את (2) עם (3) ונקבל: $2x\cdot f\left(y^2\right)=2y\cdot f\left(x^2\right)$.

נציב $y=1$ ונקבל ש-$f(x)=x\cdot f(1)$ לכל x.

נציב ונבדוק ש-$f(x)=ax$ פתרון של המשוואה לכל קבוע a.

$$a\cdot x^3+a\cdot y^3=(x+y)\left(a\cdot x^2+a\cdot y^2-a\cdot xy\right)$$

2. $f\left(x^2+xy+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+x\cdot f\left(y\right)+y$.

פתרון: נסמן $f\left(0\right)=c$. נציב $x=0$ ו- x במקום y , ונקבל:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=c^2+x \tag{1}$$

עכשיו נציב $y=0$ ונקבל:

$$f\left(x^2+c\right)=f\left(x\right)^2+cx \tag{2}$$

נשנה סימן ל-x במשוואה האחרונה ונקבל

$$f\left(x^2+c\right)=f\left(-x\right)^2-cx \tag{3}$$

בנוסף, מההצבה $\left(-x,x\right)$ במשוואה המקורית מקבלים

$$f\left(f\left(x\right)\right)=\left(f\left(-x\right)\right)^2-x\cdot f\left(x\right)+x \tag{4}$$

נשווה בין (1) ל-(4) ונקבל $f\left(-x\right)^2-x\cdot f\left(x\right)=c^2$.

נשווה בין (2) ל-(3) ונקבל $f\left(-x\right)^2=f\left(x\right)^2+2cx$

משתי המשוואות האחרונות נובע ש-

$$f\left(x\right)^2-x\cdot f\left(x\right)=c^2-2cx \tag{*}$$

הינו ממש שמחים לגלות את c .

לפי (1) הפונקציה חח"ע ועל. לכן קיים a עבורו $f\left(a\right)=0$. נציב $x=a$ ב-(*) ונקבל:

$$0=c\left(c-2a\right)$$

אם $c\neq 0$ אז $c=2a$. נציב $x=4a$ במשוואה (*) ונקבל

$$f\left(4a\right)^2-4a\cdot f\left(4a\right)=c^2-8ac=4a^2-16a^2=-12a^2$$

$$\left(f\left(4a\right)-2a\right)^2+8a^2=f\left(4a\right)^2-4a\cdot f\left(4a\right)+12a^2=0$$

לכן כל מחובר בצד שמאל מתאפס, בפרט $a=0$.

ובכן, $f\left(0\right)=0$ ולכן (*) הופך ל- $f\left(x\right)^2-x\cdot f\left(x\right)=0$.

נשים לב כי $f\left(x\right)\neq 0$ לכל $x\neq 0$, כי הפונקציה חח"ע, ולכן מקבלים ש- $f\left(x\right)=x$

לכל $x\neq 0$ אבל זה נכון גם כאשר $x=0$ ולכן $f(x)=x$ לכל x וברור שזה פתרון של המשוואה.

3. $f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{x\cdot f(y)}\right)=f(y)$ כאשר $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$.

פתרון: נחפש הצבה כך ש- $y=\frac{x+1}{xf(y)}$ ולכן נציב $x'=\frac{1}{y\cdot f(y)-1}$ ונקבל כי

$f\left(\frac{y}{f(x')+1}\right)=0$ אבל הפונקציה יכולה לקבל רק ערכים חיוביים ולכן ההצבה שלנו

הייתה בלתי חוקית כלומר $x'\le 0$ ולכן $y\cdot f(y)\le 1$ לכל y .

מהמשוואה המקורית נובע ש-

$$\frac{f(x+1)}{y}+\frac{x\cdot f(y)}{x+1}\ge f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{x\cdot f(y)}\right)=f(y)$$

או במילים אחרות:

$$\frac{f(x+1)}{y}\ge\frac{1}{x+1}\cdot f(y)$$

$$(x+1)\cdot f(x+1)\ge y\cdot f(y)$$

נציב $y=z+1$ במשוואה האחרונה ונקבל:

$$(x+1)\cdot f(x+1)\ge(z+1)\cdot f(z+1)$$

עכשיו אם נציב $(z+1,\,x)$ במשוואה המקורית ונבצע את אותו התהליך נקבל אי-שוויון בכיוון ההפוך ולכן נקבל $u\cdot f(u)=v\cdot f(v)$ לכל $u,v>1$ כלומר $f(x)=\frac{c}{x}$ לכל $x>1$.

נציב y ממש גדול משוואה המקורית ונקבל:

$$\frac{c\cdot f(x+1)}{y}+f\left(\frac{(x+1)y}{x\cdot c}\right)=\frac{c}{y}$$

$$\frac{c^2}{(x+1)y}+\frac{c^2x}{(x+1)y}=\frac{c}{y}$$

לכן $c=1$. כלומר $f(x)=\frac{1}{x}$ לכל $x>1$.

טענה: הפונקציה יורדת במובן החזק.

הוכח הטענה: נשים לב כי $x+1>1$ לכל $x>0$ ולכן אפשר להפוך את המשוואה המקורית ל- $f(y(x+1))+f\left(\frac{x+1}{x\cdot f(y)}\right)=f(y)$

כל מספר $z>y$ ניתן לרשום בצורה $z=y\cdot(x+1)$, ולכן

$$f(z)\leq f(z)+f(\ldots)=f(y)$$

אבל הפונקציה מקבלת ערכים חיוביים ולכן הוכחנו את הטענה.

טענה 2: $f(y)=\frac{1}{y}$ לכל $y>\frac{1}{2}$.

הוכח הטענה: נוכיח כי $f(1)=1$.

כבר קודם הוכחנו כי $y\cdot f(y)\leq 1$, בפרט $f(1)\leq 1$. בנוסף שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $f(1)<f(1+\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon}$, ואם נשאיף את ε ל-0 נקבל $f(1)\geq 1$.

עכשיו נרצה להציב x,y כך ש- $1>y>\frac{1}{2}$ אבל $y(x+1)>1$ ו- $\frac{x+1}{x\cdot f(y)}>1$. במילים אחרות אנחנו מחפשים הצבה כך ש- $\frac{1}{y}-1<x<\frac{1}{f(y)-1}$

כלומר לכל $\frac{1}{2}<y<1$. אנחנו רוצים להוכיח כי $\frac{1}{y}-1<\frac{1}{f(y)-1}$ ואז נוכל לבחור x בקטע הזה.

כלומר מספיק להוכיח כי $f\left(y\right)-1<\dfrac{y}{1-y}$, נוסיף אחד לשני האגפים ונקבל שמספיק

להוכיח כי $f\left(y\right)<\dfrac{1}{1-y}$.

אבל כבר הוכחנו כי $f\left(y\right)\le\dfrac{1}{y}$ לכל y , בנוסף ה- y שלנו גדול מחצי וקטן מאחד ולכן

$y>1-y$ ולכן $\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{1-y}$ ולכן מקבלים בדיוק את מה שרצינו: $f\left(y\right)<\dfrac{1}{1-y}$ ולכן

ההצבה שחיפשנו קיימת, אחרי שנציב אותה נקבל:

$$\frac{1}{y\left(x+1\right)}+\frac{x\cdot f\left(y\right)}{x+1}=f\left(y\right)$$

במילים אחרות: $1+xy\cdot f\left(y\right)=y\left(x+1\right)\cdot f\left(y\right)$ ולכן $f\left(y\right)=\dfrac{1}{y}$.

סיימנו להוכיח את הטענה.

עכשיו נוכיח באינדוקציה ש- $f\left(y\right)=\dfrac{1}{y}$ לכל $y\ge\dfrac{1}{2^n}$, את צעד האינדוקציה אפשר

להוכיח בדיוק כמו שהוכחנו את טענה 2, צריך רק להוכיח שגם $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ ואת זה אפשר

להוכיח בדיוק באותה צורה כמו שהוכחנו ש- $f\left(1\right)=1$. מאינדוקציה נקבל ש- $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$

לכל $x>0$. נשאר לבדוק שזה מקיים את התנאים אבל בעצם עשינו את זה כבר במהלך הפתרון.

4. $f\left(f\left(x\right)-y^2\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2-2f\left(x\right)\cdot y^2+f\left(f\left(y\right)\right)$.

פתרון: נשים לב ש- $f\equiv 0$ הוא פתרון של המשוואה ומעכשיו נניח כי f לא זהותית 0.

נציב $x=y=0$ ונקבל כי $f\left(f\left(0\right)\right)=\left(f\left(0\right)\right)^2+f\left(f\left(0\right)\right)$ לכן $f\left(0\right)=0$.

עכשיו נציב רק $y=0$ ונקבל:

$$(1) \qquad f\left(f(x)\right)=\left(f(x)\right)^2$$

ולכן אפשר לשכתב את המשוואה המקורית:

$$f\left(f(x)-y^2\right)=\left(f(x)\right)^2-2f(x)\cdot y^2+\left(f(y)\right)^2$$

אגף ימין מזכיר ריבוע, אכן אם נציב $f(z)$ במקום y ונשתמש ב-(1), נקבל ש-

$$f\left(f(x)-f\left(f(z)\right)\right)=\left(f(x)-f\left(f(z)\right)\right)^2$$

כלומר לכל x ולכל y בתמונה, מתקיים ש-

$$(2) \qquad f\left(f(x)-f(y)\right)=\left(f(x)-f(y)\right)^2$$

היינו ממש שמחים להבין שכל מספר הוא מהצורה $f(x)-f(y)$, כאשר y בתמונה.

בשביל זה נקבע x במשוואה המקורית ונזיז את y. נקבל ש-

$$f\left(f(x)-y^2\right)-f\left(f(y)\right)=\left(f(x)\right)^2-2f(x)\cdot y^2$$

בצורה כזאת נוכל לקבל קל מספר לא חיובי.

לכן לפי (2) כל מספר לא חיובי x מקיים $f(x)=x^2$.

כמסקנה, כל המספרים החיוביים בתמונה.

ומזה נובע שכל המספרים החיוביים בתמונה, אבל מ-(1) נובע כי $f(x)=x^2$ לכל x,

ולכן לכל המספרים החיוביים. כלומר לכל x ממשי $f(x)=x^2$. נציב ונבדוק שזה מקיים את תנאי השאלה:

$$\left(x^2-y^2\right)^2=\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot y^2+\left(y^2\right)^2$$

וזה נכון. קיבלנו שני פתרונות: $f(x)=x$ ו-$f\equiv 0$.

5. $f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x\right)+3x+y\cdot f\left(y\right)$ כאשר $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$.

פתרון ראשון: נעשה סימטריזציה!

נתונה נוסחה עבור $f\left(f\left(x\right)+y\right)$ אז נציב $f\left(z\right)+y$ במקום y, ונקבל:

$$f\left(f\left(x\right)+f\left(z\right)+y\right)=f\left(x\right)+3x+\left(f\left(z\right)+y\right)\cdot f\left(f\left(z\right)+y\right)=$$
$$=f\left(x\right)+3x+\left(f\left(z\right)+y\right)\cdot\left(f\left(z\right)+3z+y\cdot f\left(y\right)\right)$$

אבל הביטוי $f\left(f\left(x\right)+f\left(z\right)+y\right)$ סימטרי ב-x,z ולכן גם הביטוי באגף ימין צריך להיות סימטרי, נחליף בין x ל-z ונשווה בין שני הביטוי באגף ימין ונקבל:

$$f\left(x\right)+3x+\left(f\left(z\right)+y\right)\cdot\left(f\left(z\right)+3z+y\cdot f\left(y\right)\right)=$$
$$=f\left(z\right)+3z+\left(f\left(x\right)+y\right)\cdot\left(f\left(x\right)+3x+y\cdot f\left(y\right)\right)$$

נעביר אגפים ונצמצם, נקבל

$$y\cdot f\left(y\right)\cdot\left(f\left(z\right)-f\left(x\right)\right)=y\cdot\left(f\left(x\right)+3x-f\left(z\right)-3z\right)+$$
$$+f\left(x\right)\cdot\left(f\left(x\right)+3x\right)-f\left(z\right)\cdot\left(f\left(z\right)+3z\right)+\left(f\left(z\right)+3z\right)-\left(f\left(x\right)+3x\right)$$

מה שרשום כאן זה בעצם $f\left(y\right)=a+\frac{b}{y}$, אם קיימים z,x עבורם $f\left(z\right)\neq f\left(x\right)$.

גם אם לא קיימים x,z מסוג זה, כלומר f קבועה, הנוסחה נכונה, כאשר $b=0$.

נשאר לבדוק איזה ערכים של a,b מתאימים עבור המשוואה המקורית. קודם כל, $a\geq 0$ וגם $b\geq 0$, אחרת לא לכל $x\in\mathbb{R}_{>0}$ מתקיים $a+\frac{b}{x}\in\mathbb{R}_{>0}$.

$$a+\frac{b}{a+\frac{b}{x}+y}=a+\frac{b}{x}+3x+y\cdot\left(a+\frac{b}{y}\right)$$

$$\frac{bx}{ax+b+xy}=\frac{b}{x}+3x+ay+b$$

אם $b=0$ נקבל שלכל x,y חיוביים מתקיים $0=3x+ay$ וזה לא מתקיים ל-x גדול מספיק. אם $b>0$ אז עבור $x\to 0+$ נקבל שאגף שמאל שואף ל-0, ואגף ימין גדול ממש. לכן למשוואה שלנו אין אף פתרון.

פתרון שני:

טענה: $f\left(x\right)$ שואף לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף.

הוכחת הטענה: נקבע את x ונשאיף את y לאינסוף, אם שני האגפים שואפים לאינסוף אז הוכחנו את הטענה. בשביל ששני האגפים לא ישאפו לאינסוף $f\left(y\right)$ צריך לשאוף ל-0 אבל אז גם $f\left(f\left(x\right)+y\right)$ ולכן באגף שמאל מקבלים משהו קטן ובאגף ימין משהו שלפחות $f\left(x\right)=3x$ בסתירה.

מהטענה נובע שקיים קבוע חיובי a כך ש-$f\left(x\right)\geq 1$ לכל $x>a$.

לכן לכל $y>a$ ולכל x מתקיים

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)>f\left(x\right)+y\cdot f\left(y\right)\geq f\left(x\right)+y$$

כלומר קיים קבוע חיובי b כך ש-$f\left(z\right)>z$ לכל $z>b$.

אי לכך לכל x ולכל $y>b$ מתקיים:

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)>y\cdot f\left(y\right)>y^2$$

ולכן קיים קבוע חיובי c כך ש-$f\left(x\right)>\frac{x^2}{2}$ לכל $x>c$.

אבל קיים גם קבוע חיובי d עבורו $f\left(x\right)>c$ לכל $x>d$. לכן לכל $x>\max\left(a,d\right)$ ולכל y מתקיים $f\left(f\left(x\right)+y\right)>\frac{1}{2}\left(f\left(x\right)+y\right)^2>\frac{1}{2}\left(f\left(x\right)\right)^2$

אבל מהמשוואה המקורית נובע

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x\right)+3x+y\cdot f\left(y\right)<4f\left(x\right)+y\cdot f\left(y\right)$$

משני אי-השוויונים האחרונים מקבלים:

$$4f\left(x\right)+y\cdot f\left(y\right)>\frac{1}{2}\left(f\left(x\right)\right)^2$$

לכל x גדול מספיק, אבל זה בברור שקר כי הוכחנו שכאשר x שואף לאינסוף, כך גם $f\left(x\right)$ ולכן אי השוויון האחרון לא יכול להתקיים. לכן אין פתרון למשוואה.

6. $f\left(x+y\cdot f\left(x^2\right)\right)=f(x)+x\cdot f(xy)$.

פתרון: נציב $y=0$ ונקבל $f(x)=f(x)+x\cdot f(0)$. לכן $f(0)=0$.

נסמן $f(1)=a$. נציב $x=1$ ונקבל

$$f(1+ay)=a+f(y)$$

אם $a\neq 1$ נוכל לפתור משוואה $1+ay=y$ על ידי $y=\frac{1}{1-a}$, ואז נסיק $a=0$. אבל במקרה זה $f(y)=f(1)=0$ לכל y, וכך מקבלים פתרון $f\equiv 0$.

בכל מקרה אחר $a=1$. במקרה זה מקבלים

$$f(1+y)=1+f(y) \qquad (1)$$

מהצבה $y=-1$ נקבל $0=1+f(-1)$, כלומר $f(-1)=-1$.

נציב גם $x=-1$ במשוואה המקורית

$$f(-1+y)=-1-f(-y)$$

אבל לפי משוואה (1) מקבלים כי $f(-1+y)=f(y)-1$ לכן

$$f(y)-1=-1-f(-y)$$

לכן הפונקציה אי-זוגית.

נניח שקיים $c\neq 0$ כך ש-$f(c)=0$. אז גם $f(-c)=0$, כלומר לה"כ $c>0$. נציב $x=\sqrt{c}$ ונקבל במשוואה המקורית:

$$f(x)=f(x)+\sqrt{c}\cdot f\left(\sqrt{c}\cdot y\right)$$

לכן $f\left(\sqrt{c}\cdot y\right)=0$ לכל y, כלומר $f\equiv 0$. מקרה זה כבר היה, אז ניתן להניח שלכל $c\neq 0$ גם $f(c)\neq 0$.

על מנת לאפס את אגף שמאל במשוואה המקורית אפשר להציב $y=-\frac{x}{f\left(x^2\right)}$ ונקבל

$$x\cdot f\left(\frac{x^2}{f\left(x^2\right)}\right)=f\left(x\right)$$

נרצה לשפר את ההצבה הזו שתהיה לנו דרגת חופש נוספת ולכן נציב $y=\frac{z-x}{f\left(x^2\right)}$ ונקבל:

$$f\left(z\right)=f\left(x\right)+x\cdot f\left(\frac{x\left(z-x\right)}{f\left(x^2\right)}\right) \qquad (2)$$

עכשיו נרצה להגדיל את $\frac{x\left(z-x\right)}{f\left(x^2\right)}$ ב-1, ולכן נציב $y=\frac{z-x+\frac{f\left(x^2\right)}{x}}{f\left(x^2\right)}$ ונקבל

$$f\left(z+\frac{f\left(x^2\right)}{x}\right)=f\left(x\right)+x\cdot f\left(\frac{x\left(z-x\right)}{f\left(x^2\right)}+1\right)$$

נציב את (2) במשוואה האחרונה, ונשתמש ב-(1) ונקבל

$$f\left(z+\frac{f\left(x^2\right)}{x}\right)=f\left(z\right)+x \qquad (*)$$

זו משוואה טובה שמזכירה חיבוריות, נחליף את x ב-$f\left(x\right)$ ב-$(*)$ ונקבל:

$$f\left(z+\frac{f\left(\left(f\left(x\right)\right)^2\right)}{f\left(x\right)}\right)=f\left(z\right)+f\left(x\right) \qquad (**)$$

ובשביל לקבל חיבוריות מספיק להוכיח כי

$$\frac{f\left(\left(f\left(x\right)\right)^2\right)}{f\left(x\right)}=x \qquad (3)$$

בשביל זה נאפס את אגף ימין ב-$(**)$ על ידי הצבה $x=-z$, נקבל 0 ולכן $f\left(\ldots\right)=0$ כלומר $\ldots=0$

$$z-\frac{f\left(\left(f\left(z\right)\right)^{2}\right)}{f\left(z\right)}=0$$

וזה בדיוק מה שהיה חסר. הוכחנו שהפונקציה חיבורית. נחזור למשוואה המקורית:

$$f\left(x\right)+f\left(y\cdot f\left(x^{2}\right)\right)=f\left(x+y\cdot f\left(x^{2}\right)\right)=f\left(x\right)+x\cdot f\left(xy\right)$$

$$f\left(y\cdot f\left(x^{2}\right)\right)=x\cdot f\left(xy\right)$$

המשוואה הזו מזכירה כפליות, נחליף את x ב-$f\left(x\right)$ במשוואה האחרונה ונקבל:

$$f\left(y\cdot f\left(\left(f\left(x\right)\right)^{2}\right)\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(f\left(x\right)y\right)$$

נשתמש ב-(3) ונקבל ש-

$$f\left(y\cdot x\cdot f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(f\left(x\right)\cdot y\right)$$

נציב $y=\frac{z}{f\left(x\right)}$ במשוואה האחרונה ונקבל

$$f\left(xz\right)=f\left(x\right)f\left(z\right)$$

לכל x,z. הוכחנו שהפונקציה חיבורית וכפלית ולכן היא חייבת להיות הזהות.

קל לראות שהזהות מקיימת את התנאים.