משפט השאריות הסיני

0. משפט שאריות הסיני:

נניח כי p,q מספרים טבעיים זרים, ונניח רוצים לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$$

אז קיים מספר שלם x המקיים אותן, והוא יחיד עד כדי הזזות ב- pq.

1. לב רוצה לארגן תחרות קבוצתית, וניסה לחלק את כולם לשלישיות, אבל גילה שחסר לו אדם אחד בשביל זה, אז הוא ניסה לחלק את כולם לרביעיות, ועוד פעם גילה שהוא צריך בשביל זה עוד אדם, לבסוף ניסה לסדר בחמישיות, וגם גילה שחסר לו תלמיד,(לאחר זה לב ויתר ונתן למינק לחלק את הקבוצות) כמה תלמידים יש במחנה?

2. הוכיחו שלכל מספר a שלם a^5-a מתחלק ב-30.

3. האם קיים N עבורו $\frac{N}{2}$ ריבוע שלם, $\frac{N}{3}$ חזקה שלישית ו- $\frac{N}{5}$ חזקה חמישית?

4. הוכיחו שקיימים מספרים a,b כך שלכל $0 \le i,j \le 2017$ מתקיים $a+i$ לא זר ל- $b+j$.

5. הוכיחו שאם $(m,n)=1$ אז $\varphi(nm)=\varphi(n)\cdot\varphi(m)$ כאשר $\varphi(n)$ זה כמות המספרים הטבעיים הקטנים וזרים ל- n.

6. מצאו את כל המספרים הדו-ספרתיים N, כך שברישום העשרוני של N^2, המספר N מופיע בצד ימין.

7. נניח כי $\frac{a}{23!} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{23}$. מצאו את השארית של a בחלוקה ב-1001.

8. אוסף ישרים במישור נקרא מושלם אם אף שני ישרים לא מקבילים, אף שלושה לא נפגשים בנקודה, והחיתוך של כל שני ישרים הוא בעל קורדינטות שלמות, האם לכל אוסף מושלם, של שלושה ישרים או יותר, ניתן להוסיף עוד ישר כך שהאוסף יישאר מושלם?

9*. נקודה במישור נקראת פרימיטיבית אם שתי הקורדינטות שלה מספרים שלמים וזרים.נתונה קבוצה סופית S של נקודות פרימיטיביות, הוכיחו שקיים פולינום הומוגני בשני משתנים ומקדמים שלמים $P(x,y)$, כך שלכל $(a,b)\in S$ מתקיים: $P(a,b)=1$

(פולינום הומוגני הוא פולינום מהצורה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}y+\ldots+a_0y^n$.)

10*. הוכיחו שקיים N טבעי, עבורו 100 הספרות הימניות של 2^N מכילות לפחות 50 פעמים את הספרה תשע.

בתאבון!