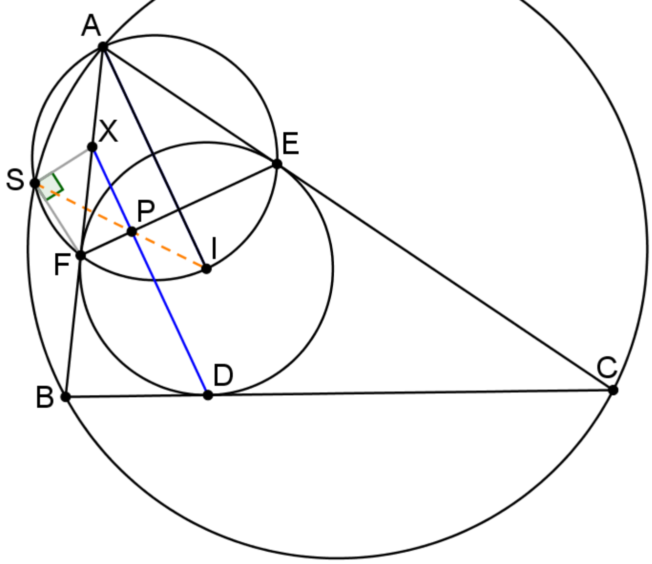
פתרונות

1. נטען ש-I,P,S ישר. נבצע אינוורסיה ביחס למעגל החסום. A,B,C עוברות לאמצעי הקטעים EF,DF,ED בהתאמה ולכן המעגל החוסם עובר למעגל 9-הנקודות של DEF. בנוסף המעגל $AEIFS$ עובר לישר EF ולכן S עוברת לחיתוך של מעגל 9 הנקודות של DEF עם הצלע EF, כלומר ל-P.



נשאר לעשות חשבון זוויות קצר:

$$\angle FXP = \angle FAI = \angle FSI = \angle FSP$$

ולכן F,P,X,S נמצאות על מעגל ו-$\angle XPF$ ישרה ולכן גם $\angle XSF$ ישרה.

2. תחילה, אנחנו יודעים ש-S מקיימת את מה ש-T צריכה לקיים בגלל צירים רדיקליים בין המעגלים BIC, AIS, ABC. כעת, נוכיח ש-$T = S$. נגדיר את X להיות החיתוך של האנך ל-AI ב-I עם BC. נוכיח שהזווית ASP ישרה, כלומר, SPI ישר. אבל עשינו את זה כבר ב-1.

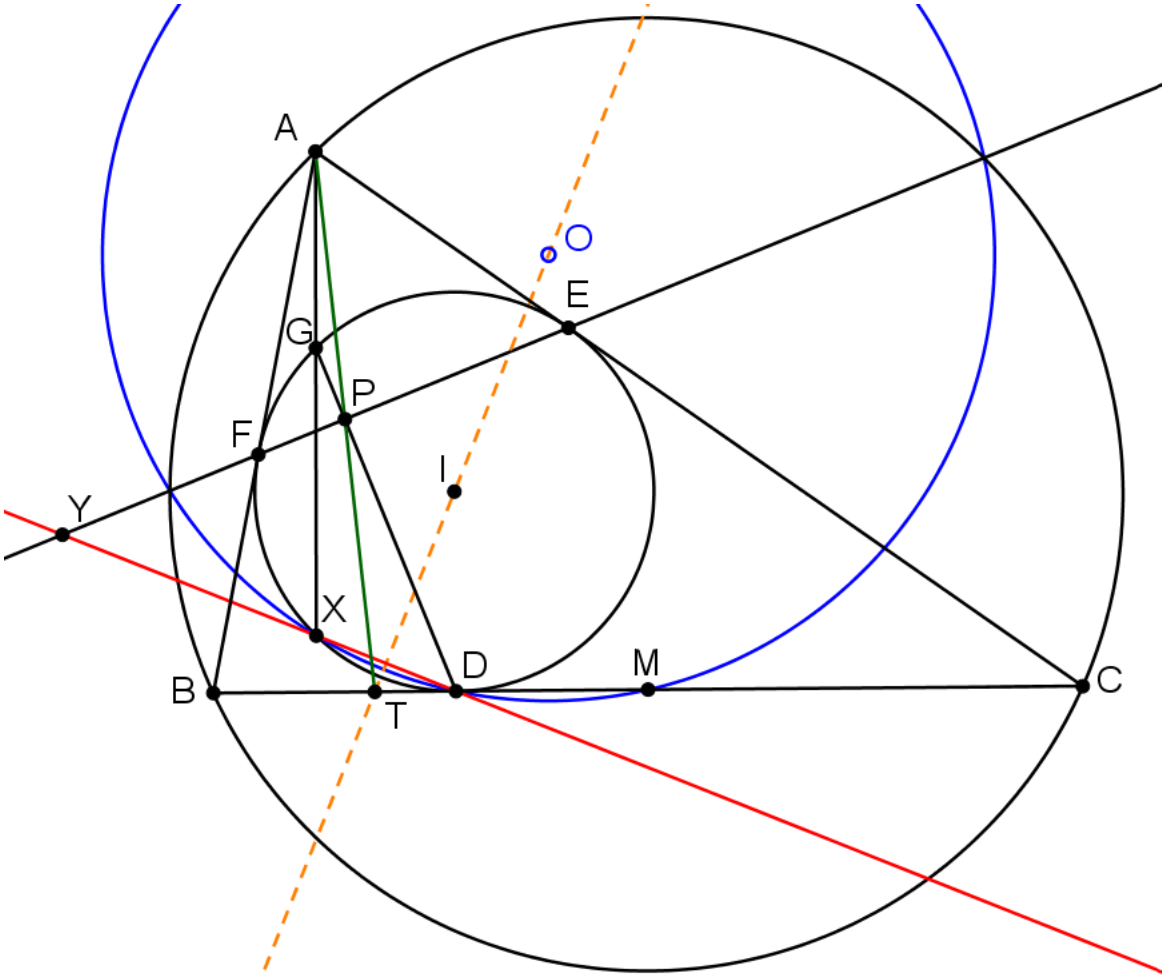
3. נוכיח ש-XY מקביל ל-BC. נסמן את הנקודה A' להיות הנגדית ל-A על Ω. אז SI ו-$S'I_a$ עוברות ב-A'. המשולש $IA'I_a$ שווה שוקיים ואז עם משחק זוויות ניתן להוכיח זאת. כעת, נסמן ב-K_1,K_2 את החיתוכים של האנכים ל-AI בנקודות I,I_a בהתאמה עם הישר BC. כמו שאלה 2 אנחנו יודעים ש-$ASK_1, AS'K_2$ ישרים. ו-K הוא אמצע K_1K_2.

4. נסמן ב-G את החיתוך של DP עם ω וב-X את החיתוך השני של AG עם ω. נסמן ב-T את החיתוך של AP עם BC. הוכיחו שהישר TI עובר במרכז המעגל החוסם של XDM.

פתרון: נסמן ב-O את מרכז המעגל XDM. ברור ש-IO הוא האנך האמצעי של XD ולכן צריך להוכיח ש-T על אנך אמצעי זה. נשים לב ש-TD משיק למעגל החסום ולכן מספיק להוכיח ש-TX משיק גם הוא.

נסמן את החיתוך של EF עם DX ב-Y. ברור ש-$(X,G;E,F) = -1$, נטיל מ-D על EF ונקבל ש-$(Y,P;E,F) = -1$ ולכן הדואלי של Y עובר ב-P אבל הוא בברור עובר גם ב-A

ולכן APT הוא הישר הדואלי ל-Y ולכן הדואלי ל-T עובר ב-Y ולכן הדואלי זה DY כלומר TX משיק למעגל החסום, כנדרש.



5. תחילה, נוכיח ש-$BCYZ$ חוסם מעגל, זה נובע ממשפט הדגל הבריטי ההפוך. אז גם YZ משיק ב-G. כעת, נוכיח ש-$BCYZ$ על מעגל, זה נובע מכך שהזווית בין DG ל-EF ישרה. כעת, נסמן ב-X את החיתוך של AS עם BC. אז YZ עובר ב-X בגלל סימטריה ביחס ל-XI של 2 המשיקים מ-X (הישר בין נקודות ההשקה מאונך ל-XI). מצירים רדיקליים במעגלים $BCYZ, \Omega, AYZ$, נקבל ש-S על המעגל AYZ. לכן, נרצה להוכיח ש-H על SI. נגדיר את H בתור החיתוך של SI עם המעגל AYZ ונוכיח שהוא על הגובה מ-A. נעשה אינוורסיה מ-A שמעבירה את Z ל-B ואז Y ל-C. אז S תעבור ל-X ו-H תעבור לנקודה על BC שמקיימת ש-$SHH'X$ מעגל, ולכן H' היא עקב הגובה.

6. נסמן ב-K, L את הקוטב הדרומי והצפוני ב-Ω. תחילה, נוכיח ש-LDS ישר. נעשה אינוורסיה ביחס ל-L שמשאירה את B, C במקום. אז אם נגדיר את X להיות החיתוך של AS עם BC אז המעגל עם קוטר XI נשאר במקום. לכן, D תעבור לנקודה על המעגל $XSID$ ועל המעגל Ω ולכן תלך ל-S.

כעת, נוכיח ש-KDT ישר. נעשה זאת בעזרת משפט פסקל על הנקודות: $ATKA'SL$. אז $AT, A'S$ נחתכים ב-P וכן $AK, A'L$ נחתכים באינסוף בכיוון AI. אך אנחנו יודעים ש-DP

מקביל ל-AI ולכן, נקבל מפסקל ש-TK, SL נחתכים על PD. אך SL עובר ב-D ולכן גם TK עובר ב-D.

כעת, $BCKL$ רביעייה הרמונית. נטיל אותה דרך D שוב על Ω. אז $CBST$ רביעייה הרמונית. לכן ST תיכושקף במשולש SBC ולכן, השיקוף של ST ביחס לחוצה הזווית, שהוא SL יהיה SM. לכן D על חוצה הזווית TSM. לכן, SM חותכת את Ω בנקודה באותו הגובה כמו T. ולכן, גם ההיפך יהיה נכון, כלומר, החיתוך של TM עם Ω יהיה באותו הגובה כמו S. ולכן, גם TD חוצה את הזווית STM. לכן, D מרכז המעגל החסום ב-STM.
כעת, נשים לב, שחוצי הזוויות החיצוניים במשולש הזה, שמאונכים לחוצי הזוויות הפנימיים הם KL, KX, LX ולכן K, L, X הם מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ.

7. תחילה, נוכיח ש-$XK = XL$. נשים לב שמשאלה 5 אנו יודעים ש-X נמצאת גם על הישר YZ. בנוסף, אנחנו גם הוכחנו ב-5 ש-YZ משיק ל-ω ונסמן את נקודת ההשקה ב-G. אז נקבל שהמשיקים מ-X ל-ω הם XD, XG. בנוסף, אנחנו יודעים שהישר XI, שהוא חוצה הזווית של DXG, מאונך ל-AI ולכן מקביל ל-EF. לכן, נקבל ש-EF מקביל לחוצה הזווית החיצוני של KXL ולכן $XK = XL$.

כעת, נוכיח את שוויון הזוויות $XSK = XSL$. ניזכר באינוולוציית דזארג: נתונים 4 נקודות וישר שלא עובר דרכן. אז כל שניונית דרך 4 הנקודות הללו חותכת פעמיים את הישר. ההעתקה מנקודת חיתוך אחת לאחרת היא אינוולוציה פרוייקטיבית. ניתן לראות זאת כאשר לוקחים העתקה פרוייקטיבית ששולחת שתיים מתוך 4 הנקודות שלנו ל-I, J ואז אנחנו מקבלים מעגלים שעוברים דרך 2 הנקודות הנותרות וחותכים את הישר ב-2 נקודות שונות. אבל אם נסתכל על החיתוך של הישר שלנו, והישר דרך 2 הנקודות הקבועות אז אינוורסיה ממנו מחליפה בין זוגות הנקודות שנוצרו על הישר ולכן ההעתקה תהיה אינוורסיה. לכן במקור ההעתקה פרוייקטיבית.
כעת, ניעזר בטענה הזאת על הישר EF והנקודות B, C, Y, Z. ננסה לראות מה ההעתקה. אז אם נסתכל על השניונית שהיא מכפלת הישרים BZ, CY נקבל ש-E, F מתחלפות. אם נסתכל על השניונית שהיא מכפלת הישרים BY, CZ אז נקבל ש-P עוברת לעצמה. אז מצאנו את התמונות של ההעתקה ל-3 נקודות (E, F, P) ולכן היא יחידה. נשים לב, שההעתקה הפרוייקטיבית שהיא שיקוף סביב הישר SP גם מחליפה בין E, F ומשאירה את P במקום – מחליפה בין E, F כי SPI זהו חוצה זווית במשולש ESF בגלל ש-I היא אמצע הקשת EF במעגל $EFSIA$. לכן, מכך שההעתקה יחידה, נקבל שהוא בדיוק השיקוף סביב SP. כעת, נשים לב, שההעתקה גם מחליפה בין K, L מהשניונית שהיא מכפלת הישרים BC, YZ. לכן, הישרים SK, SL סימטריים סביב הישר SP אבל אנחנו יודעים ש-SP מאונך ל-SX, ולכן הם סימטריים גם ביחס אליו. לכן הזוויות XSK, XSL שוות.

ניתן להוכיח בעזרת טיעון קשיחות די קשוח שמכך ש-$XK = XL$ וכן ש-$XSK = XSL$ ובנוסף, ש-S אינה על האנך האמצעי של KL, שמתקיים $XKSL$ מעגל.

כעת, נשים לב, שהישר XI משיק ל-2 המעגלים הללו, ובנוסף, ש-XS מאונך ל-IS (וכן S היא נקודת חיתוך של 2 המעגלים). כעת, אם נסמן ב-S' את נקודת החיתוך השנייה של המעגלים, אז מסתבר שמתקיים שסכום הזוויות הוא $XSI + XS'I = 180$. זוהי טענה

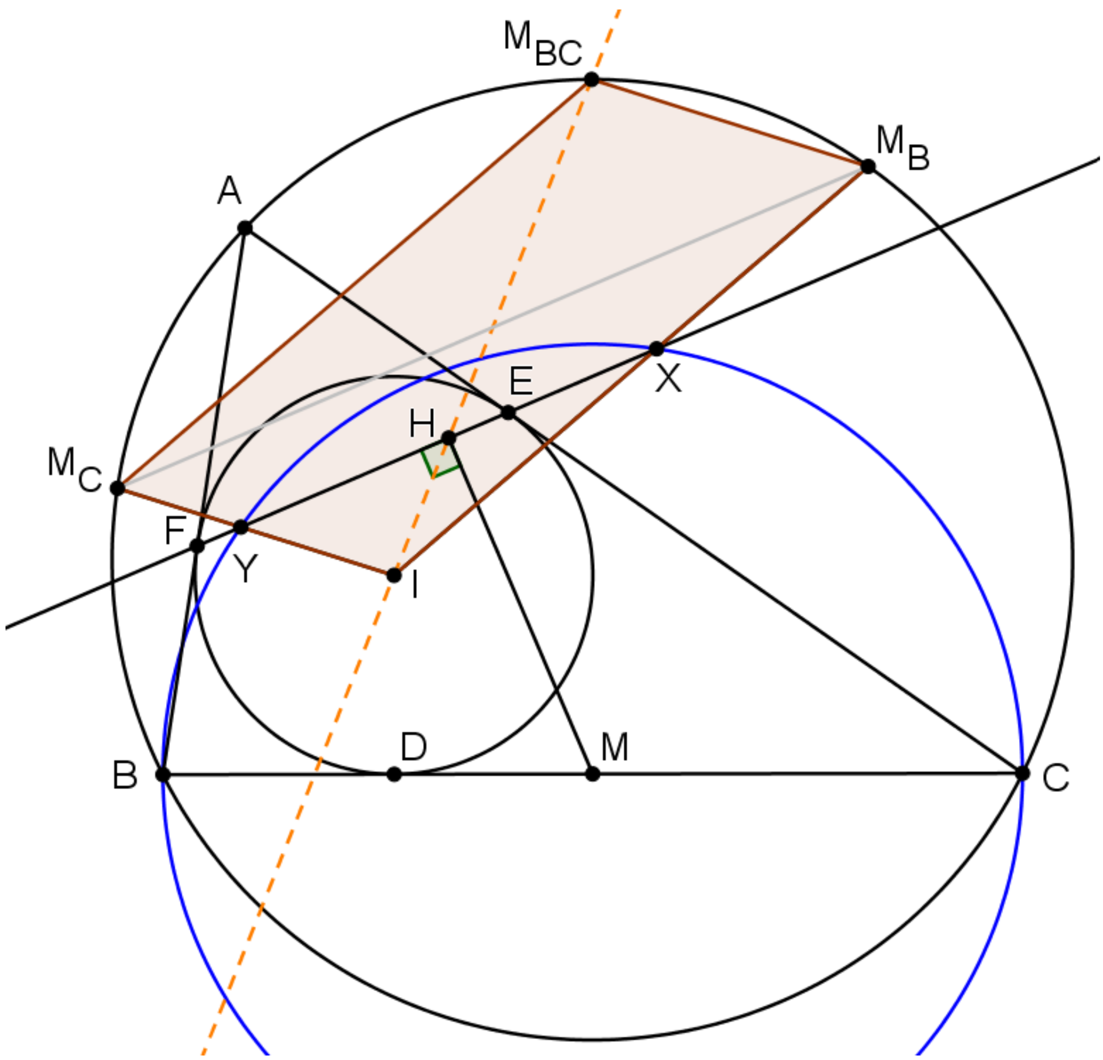
שהייתה באירוע גיאומטריה האחרון. לכן, נקבל ש-$XS'I$ גם ישרה. אבל אז נקבל ש-$XSS'I$ מעגל, ואם $S' \neq S$ אז המעגל הזה חותך את המעגל $SS'I$ ב-3 נקודות (והוא לא עובר ב-X). ולכן, קיבלנו ש-$S' = S$ ולכן המעגלים משיקים.

8. תחילה, נוכיח ש-D נמצאת על המעגל MRQ. נסמן את נקודת החיתוך של RQ עם BC ב-Z. אינוורסיה ב-Z ששומרת על המעגל החוסם, שומרת גם על המעגל MRQ ומעבירה את הרביעיה ההרמונית $(Z, D; B, C)$ לרביעה ההרמונית $(\infty, M; C, B)$ ולכן $MRQD$ מעגל.

נסמן את מרכז המעגל $RQMD$ ב-O, ונסמן ב-M_{BC} את אמצע הקשת $\widehat{BAC}$. נוכיח ש-O, H נמצאות על הישר IM_{BC} ב-2 דרכים:

<u>דרך 1:</u>

נסמן ב-M_B, M_C את אמצעי הקשתות $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ וב-X, Y את החיתוכים של EF עם BI, CI.
הלמה האירנית טוענת ש-X, Y נמצאות על מעגל עם הקוטר BC ולכן עקב האנך מ-M ל-XY הוא אמצע XY. כמובן ש-$XY||M_BM_C$ ולכן IH חוצה את M_BM_C. נשים לב ש-$IM_BM_{BC}M_C$ זו מקבילית ולכן גם IM_{BC} חוצה את M_BM_C. סך הכל נסיק ש-IH נחתך עם המעגל החוסם ב-M_{BC} וב-T שהיא נקודת ההשקה של המעגל החצי חסום.



__דרך 2:__
את מרכז המעגל $RQMD$ נסמן ב-O. אז O על האנך האמצעי של MD וכן על האנך האמצעי של QR שהוא גם האנך האמצעי של AM_{BC}, אבל 2 הישרים הללו עוברים באמצע IM_{BC}. לכן IOM_{BC} ישר. בנוסף, IM_{BC} עובר ב-H כי אם נתבונן במשולש AIM_{BC} אז MH מקביל לצלע ויש משפט תאלס, וגם EF מקביל לצלע ויש עוד משפט תאלס. אם נסמן ב-W_1 את החיתוך של AM_{BC} עם MH וב-W_2 את החיתוך של AI עם EF, אז צריך להוכיח ש-$\frac{IW_2}{W_2A} = \frac{AW_1}{W_1M_{BC}}$. נשים לב, שעקב האנך מ-$M_{BC}$ ל-AC נמצא על MH ממשפט סימפסון, ואם נסמן אותו ב-W_M אז המשולשים (עם הגבהים) $M_{BC}W_MAW_1$ ו-$AEIW_2$ דומים ולכן היחסים שווים.

נסמן ב-T את החיתוך הנוסף של IM_{BC} עם Ω. נוכיח ש-T היא נקודת ההשקה של מעגל חצי חסום ב-ABC מול A. נעשה זאת באמצעות אינוורסשיקוף מ-A שמחליף בין B ל-C. אז הישר BC מתחלף עם Ω ובנוסף המעגל החסום מבחוץ מול A יעבור למעגל החצי חסום מול A, ולכן, נקודת ההשקה של המעגל החסום מבחוץ עם BC שנסמנה D' תעבור ל-T' ונרצה להוכיח ש-$T = T'$. נשים לב, ש-I, I_a מתחלפות, וכן M_{BC} תעבור לחיתוך של AM_{BC} עם BC שנסמנה $M_{BC}{}'$. אבל נשים לב, שמתקיים ש-$M'_{BC}D'I_aA$ מעגל (עם הקוטר $M'_{BC}I_a$) ולכן, לאחר האינוורסשיקוף נקבל ש-$M_{BC}IT'$ שר ולכן $T = T'$.

כעת, נסמן ב-A' את החיתוך של הישר המקביל ל-BC דרך A עם Ω. אז נוכיח ש-TDA' ישר. נתבונן על השיקוף של 3 הנקודות הללו סביב האנך האמצעי של BC. אז A' תעבור ל-A ו-D תעבור ל-D'. אבל נשים לב, שמהאינוורסשיקוף שלנו, אנחנו יודעים ש-AT ו-AD' הם השיקופים זה של זה סביב החוצה זווית של A. ולכן, T תעבור לנקודה על AD'. ולכן, הוכחנו ש-TDA' ישר.

כעת, אם נסמן ב-G את החיתוך של DP עם ω, אז AGT ישר. נסמן ב-D_A את הקוטב הצפוני של ω. אז הזווית DGD_A ישרה, אבל אנחנו גם יודעים ש-DG מקביל לחוצה הזווית של A ולכן GD_A מאונך ל-AI. לכן $AGID_A$ דלתון ולכן AG, AD_A סימטריים סביב החוצה זווית של A. אבל AD_AD' ישר (מהומוטטיה שמעבירה מעגל חסום למעגל חסום מבחוץ) ולכן, לאחר שיקוף סביב החוצה זווית מתקיים ש-AGT ישר.

נסמן ב-X את החיתוך השני של AG עם ω. נשים לב, שהישרים TXA, TDA' סימטריים סביב TIM_{BC}. לכן, נקבל ש-$TXID$ דלתון. בנוסף, משאלה 4, אנחנו יודעים שהמרכז של המעגל החוסם של XDM על האנך האמצעי של XD, שהוא ממש TI. ולכן, המרכז הוא ממש O, כלומר, $RQMDX$ מעגל.

כעת, נרצה להוכיח שהציר הרדיקלי של המעגלים AHI, MRQ עובר ב-T. במקום זה, נוכל להסתכל על כל מעגל שעובר ב-H, I (קל לראות זאת מצירים רדיקליים), ולכן, נוכיח שהמעגלים XIH, MRQ נחתכים על הישר XT וכך נסיים.

נתבונן בישרים TX, MH ובמעגל XIH.

נניח לרגע ששלושתם אכן נחתכים בנקודה, נסמן אותה U ונחשבן:

$$\angle XUH = \angle XIH = \frac{1}{2}\angle DIX = \angle BDX = \angle XUM$$

כלומר השאלה שקולה לכך ש-MH ו-AX נפגשים על המעגל $MRQD$. כלומר מספיק להראות ש-$\angle HMD = \angle DXT$. נזכור ש-$TD = TX$ וש-TD עובר בנקודה A' כך ש-$BCAA'$ טרפז ולכן

$$\angle DXT = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle XTD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ATA' = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{\alpha}{2} + \gamma$$

אבל $\angle HMD$ זו זווית בין חוצה הזווית לצלע ולכן היא שווה $\frac{\alpha}{2} + \gamma$.