סדרות שלמות

בחלק מהשאלות מופיעות סדרות אשר איבריהן הראשונים מצוינים ושאר האיברים מוגדרים ע"פ כלל הנסיגה הנתון בשאלה

1. $a_0 = 0; a_1 = 1; a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ הוכיחו כי $2^k | a_n$ אם ורק אם $2^k | n$.

2. $a_0 = 4; a_{n+1} = a_n^2 - 2$. הראו כי שטח המשולש שצלעותיו $a_n - 1, a_n, a_n + 1$ שלם.

3. יהיו x_1, x_2 מספרים זרים חיוביים. סדרה $\{x_n\}$ אשר מתחילה בx_1, x_2 מוגדרת כך $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + 1$

א. הוכיחו כי לכל $i > 1$ קיים $j > i$ כך ש $x_i^i | x_j^j$.

ב. האם בהכרח קיים $j > 1$ כך ש $x_1 | x_j^j$?

4. האם קיימת סדרה אינסופית של ספרות שונות מאפס $\{a_n\}$ ומספר טבעי N כך שלכל $k > N$ המספר $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$ הוא ריבוע שלם?

5. $a_1 = 2; a_2 = a_3 = 7; a_{n+1} = a_n a_{n-1} - a_{n-2}$ הוכיחו כי לכל n המספר a_n קטן ב-2 מריבוע שלם.

6. מצאו את כל המספרים הטבעיים n כך שקיימת סדרה של מספרים שלמים חיוביים $a_1, \dots, a_n$ המקיימת $a_{k+1} = \frac{a_k^2+1}{a_{k-1}+1} - 1$. עבור $2 \le k \le n-1$.

7. יהי $c \ge 1$ טבעי. סדרה מוגדרת כך $a_1 = c; a_{n+1} = a_n^3 - 4ca_n^2 + 5c^2a_n + c$. הוכיחו כי לכל $n \ge 2$ קיים מספר ראשוני p אשר מחלק את a_n אבל לא את המספרים $a_1, \dots, a_{n-1}$.

בתאבון!