תרגיל פולינומים

1. מצאו את כל הפולינומים P במקדמים שלמים כך שלכל n שלם חיובי, $P(1)+P(2)+\cdots+P(n)$ מחלק את $n\cdot P(2017^n)$.

2. יהי P פולינום במקדמים ממשיים. הוכיחו כי:
   א. אם $P(x)\geq 0$ לכל x, קיימים פולינומים ממשיים A,B כך ש-$P(x)=A(x)^2+B(x)^2$.
   ב. אם $P(x)\geq 0$ לכל $x\geq 0$, קיימים פולינומים ממשיים A,B כך ש-$P(x)=A(x)^2+xB(x)^2$.

3. נתון הפולינום $P(x)=2018x^{16}+2018^2x^8+2018^4x^4+2018^8x^2+2018^{16}x$. מצאו את המחלק המשותף המירבי של $\{P(2),P(3),P(5),P(7),P(11),\dots\}$.

4. מצאו את כל הזוגות של פולינומים <u>מתוקנים</u> במקדמים ממשיים (P,Q) המקיימים:
   א. $P\big(P(x)\big)=Q\big(Q(x)\big)$
   ב. $P\big(Q(x)\big)+Q\big(P(x)\big)=P\big(P(x)\big)+Q\big(Q(x)\big)$

5. יהי P פולינום במקדמים שלמים. ידוע שלכל $k\geq 1$ שלם, קיימים פולינומים שלמים R_k,Q_k המקיימים $0<\deg Q_k\leq 1000$ ו- $P(x^k)=Q_k(x)\cdot R_k(x)$. הוכיחו כי ל-$P$ יש שורש שלם.

6. בהינתן מספר שלם m, נסמן ב-$p_{\max}(m)$ את המחלק הראשוני הגדול ביותר שלו. מצאו את כל הפולינומים במקדמים שלמים F עבורם הסדרה $a_n=p_{\max}\big(F(n^2)\big)-2n$ חסומה מלמעלה.
   <u>הערה:</u> נגדיר $p_{\max}(0)=\infty, p_{\max}(\pm 1)=1$.
   <u>הערה:</u> סדרה המכילה אינסוף אינה חסומה מלמעלה.

7. בהינתן פולינום $P(x,y)$ בשני משתנים, נאמר שהוא **בסתר במשתנה אחד** אם קיימים פולינומים $Q(t)$ ו-$R(x,y)$ כך שמעלת Q גדולה מאחד ומתקיים $P(x,y)=Q\big(R(x,y)\big)$.
   נתון פולינום P בשני משתנים כך ש-$P,P+1$ שניהם פריקים. האם הוא בהכרח בסתר במשתנה אחד?

8. יהי p ראשוני, ותהי $\overline{p_np_{n-1}\cdots p_0}$ ההצגה שלו בבסיס עשרוני. הוכיחו כי הפולינום
   $$P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_1x+p_0$$
   אי פריק מעל השלמים.

בתיאבון!