

פולינומים

1. פולינום נקרא מגניב אם סכום המקדמים של דרגות זוגיות שווה לסכום המקדמים של דרגות אי-זוגיות. האם מכפלה של פולינום מגניב בפולינום אחר זה בהכרח פולינום מגניב?

2. נתון כי 5 הוא שורש של $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$. בטאו מספר אחד לפחות שהוא שורש של פולינום $x^5 + dx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$ באמצעות a, b, c, d .

3. האם הפולינום $x^{2016} + x^{200} + 2x^{72} - 5$ מתחלק בפולינום
א. $x^7 + x^3 - 2$? ב. $x^2 + x + 1$? ג. $x^3 + x + 3$.

4. האם קיים p פולינום מדרגה 5777 שהמקדם המוביל שלו 1, ולכל $x \in [0, 3^{5777}]$ מתקיים $p(x) \in [-1, 1]$.

5. האם קיים מצולע משוכלל החסום במעגל יחידה, שניתן לבחור בו מספר אלכסונים בעלי אורכים שונים (יותר מאלכסון אחד) שמכפלתם שווה ל-1?

6. מצאו את כל הפולינומים P עבורם $x \cdot P(x-1) = (x-7) \cdot P(x)$.

7. האם קיים פולינום P עם מקדמים ממשיים, שיש לו מקדם שלילי, ולכל $k > 1$ טבעי כל המקדמים של P^k חיוביים?

8. יהא P פולינום עם מקדמים ממשיים, עבורו $P(x) - P'(x) - P''(x) + P'''(x) \geq 0$ לכל x ממשי. הוכיחו כי $P(x) \geq 0$ לכל ממשי.

9. נתון פולינום $x^8 + x^7$. גוזרים אותו ומכפילים אותו ב- $x+1$ בסדר כלשהו מספר פעמים, עד שלא מקבלים פולינום ליניארי $ax+b$. הראו כי $a-b$ מתחלק ב-49.

10. מצאו את כל הפולינומים P המקיימים $P(P(x)) + x = P(P(x) + x)$.

11. נתונים שני פולינומים P, Q המקיימים (במספרים מרוכבים):

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow Q(z) = 0$$

$$P(z) = 1 \Leftrightarrow Q(z) = 1$$

הראו שזה אותו פולינום.

בתיאבון!