תרגיל פולינומים

1. סדרת פיבונאצ'י מוגדרת לפי $F_1 = F_2 = 1$ ונוסחת הנסיגה $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל $n \geq 3$ שלם. נתונים $m, n \geq 1$ טבעיים. מצאו את המעלה המינימלית d כך שקיים פולינום $f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, המקיים $f(k) = F_{m+k}$ לכל $k = 0,1, \dots, n$.

2. נתון פולינום P עם מקדמים שלמים ומספר שלם a_0. מגדירים סדרה $a_{n+1} = P(a_n)$. נתון שקיים m חיובי שלם כך ש-$a_m = a_0$. הראו כי ה-m הנמוך ביותר שמקיים את זה הוא 1 או 2.

3. פולינום $P(x)$ עם מקדמים ממשיים מקיים $P(x) > 0$ כאשר $x \geq 0$.

הראו כי קיים n כך שלפולינום $(1+x)^n P(x)$ כל המקדמים חיוביים.

4. מספר חיובי שלם N הוא סכום של שלושה ריבועים שלמים שכולם מתחלקים ב-3. הראו שהוא גם סכום של שלושה ריבועים שלמים שאף אחד מהם לא מתחלק ב-3.

5. הראו שלכל מספר שלם N ניתן למצוא מספרים שלמים $a_1, a_2, \dots, a_{18}$ כך ש-$a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{18}^5 = N$.

6. נתונים פולינומים $P(x), Q(x), R(x,y)$ כך שלכל זוג מספרים x, y מתקיים $P(x) - P(y) = \left(Q(x) - Q(y)\right) \cdot R(x,y)$. הראו כי קיים פולינום $S(x)$ כך ש-$P(x) = S\left(Q(x)\right)$.

7. פולינום p במקדמים ממשיים מקיים $p(x+1) - p(x) = x^{100}$.

הראו כי $p(1-t) \geq p(t)$ לכל $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

בתאבון!