פולינומים

1. פולינום נקרא מגניב אם סכום המקדמים של החזקות הזוגיות שלו שווה לסכום המקדמים של החזקות האי זוגיות שלו. הוכיחו שאם P פולינום מגניב ו-Q פולינום כלשהו, אז $P \cdot Q$ פולינום מגניב.

2. עבור אילו שלישיות מספרים a, b, c, מתקיים ש$an^2 + bn + c$ שלם לכל n שלם?

3. פרקו לגורמים את הפולינום $x^6 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 1$.

4. נתונים P, Q פולינומים מתוקנים ממעלה 3. רשמו על הלוח את כל השורשים (הממשיים) של $P, Q, P - Q$. התברר שרשמו 8 מספרים שונים. האם יכול להיות שהמספר הגדול ביותר והקטן ביותר הם שורשים של P?

5. יהי $P(x)$ פולינום במקדמים שלמים, ויהיו a, b שלמים שונים כך ש$P(a) \cdot P(b) = -(a - b)^2$. הוכיחו שמתקיים $P(a) + P(b) = 0$.

6. יהיו m, n טבעיים, ויהיו $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ שלמים שונים. פולינום $P(x)$ במקדמים שלמים מקיים

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = 777$$

$$P(y_1) = P(y_2) = \cdots = P(y_m) = 6$$

מצאו את הערך המקסימלי של $m \cdot n$.

7. יהי $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ פולינום מתוקן ממעלה $n \geq 1$, שיש לו n שורשים שלמים (לא בהכרח שונים). נניח שקיימים מספרים ראשוניים שונים $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ כך שלכל $i = 0,1, \dots, n-1$, $a_i > 1$ הוא חזקה של p_i. מצאו את כל ערכי n האפשריים.

8. יהי $P(x)$ פולינום ממשי. הוכיחו כי:

   א. אם $P(x) \geq 0$ לכל x, קיימים פולינומים ממשיים A, B כך ש- $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2$.
   ב. אם $P(x) \geq 0$ לכל $x \geq 0$, קיימים פולינומים ממשיים A, B כך ש- $P(x) = A(x)^2 + x \cdot B(x)^2$.

9. מצאו את כל זוגות הפולינומים f, g במקדמים שלמים כך ש- $f(g(x)) = x^{5777} + 2017x + 1$.

10. מצאו את כל הפולינומים המתוקנים $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ממעלה $n \geq 1$, שיש להם n שורשים ממשיים (לא בהכרח שונים), וכן מתקיים $|a_0| \geq 1$, $|a_i| \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n - 1$.

11. יהי $P(x)$ פולינום כך ש $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. הוכח ש$P(x)$ לינארי.

(הערה: $P(\mathbb{Q})$ היא קבוצת כל המספרים מהצורה $P(q)$ כאשר q רציונלי)

בתאבון!