פולינומים

1. יהי $P(x)$ פולינום במקדמים שלמים, ויהיו a,b שלמים שונים כך ש$P(a)\cdot P(b)=-(a-b)^2$. הוכיחו שמתקיים $P(a)+P(b)=0$.

2. יהיו m,n טבעיים, ויהיו $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m$ שלמים שונים. פולינום $P(x)$ במקדמים שלמים מקיים

$$P(x_1)=P(x_2)=\cdots=P(x_n)=777$$

$$P(y_1)=P(y_2)=\cdots=P(y_m)=6$$

מצאו את הערך המקסימלי של $m\cdot n$.

3. יהי $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ פולינום מתוקן ממעלה $n\geq 1$, שיש לו n שורשים שלמים (לא בהכרח שונים). נניח שקיימים מספרים ראשוניים שונים $p_0,p_1,\dots,p_{n-1}$ כך שלכל $i=0,1,\dots,n-1$, $a_i>1$ הוא חזקה של p_i. מצאו את כל ערכי n האפשריים.

4. יהי $P(x)$ פולינום ממשי. הוכיחו כי:
   א. אם $P(x)\geq 0$ לכל x, קיימים פולינומים ממשיים A,B כך ש- $P(x)=A(x)^2+B(x)^2$.
   ב. אם $P(x)\geq 0$ לכל $x\geq 0$, קיימים פולינומים ממשיים A,B כך ש- $P(x)=A(x)^2+x\cdot B(x)^2$.

5. מצאו את כל זוגות הפולינומים f,g במקדמים שלמים כך ש- $f\big(g(x)\big)=x^{5777}+2017x+1$.

6. מצאו את כל הפולינומים המתוקנים $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ממעלה $n\geq 1$, שיש להם n שורשים ממשיים (לא בהכרח שונים), וכן מתקיים $|a_0|\geq 1$, $|a_i|\leq 1$ לכל $1\leq i\leq n-1$.

7. יהי $P(x)$ פולינום כך ש $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$. הוכח ש$P(x)$ לינארי.

   (הערה: $P(\mathbb{Q})$ היא קבוצת כל המספרים מהצורה $P(q)$ כאשר q רציונלי)

8. יהי p ראשוני, ותהי $\overline{p_np_{n-1}\dots p_0}$ ההצגה שלו בבסיס עשרוני. הוכיחו כי הפולינום

$$P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_1x+p_0$$

אי פריק מעל השלמים.

9. נתונים P,Q פולינומים מתוקנים ומתקיים $P\big(P(x)\big)=Q(Q(x))$ לכל x. הראו כי $P=Q$.

10. יהיו f,g פולינומים במקדמים שלמים, כך ש- $\deg f>\deg g\geq 0$. נניח שקיימים אינסוף ראשוניים p עבורם לפולינום $pf+g$ יש שורש רציונלי. הוכח שלf יש שורש רציונלי.

11. מצאו את כל המספרים הטבעיים $n\geq 2$ כך שהפולינום בn משתנים

$$P(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n-nx_1x_2\dots x_n$$

אי פריק מעל הממשיים (כלומר, אי אפשר להציגו כמכפלה של שני פולינומים ממשיים לא קבועים).

12. יהי n טבעי. עבור פולינום $P(x)$ כלשהו, נגדיר את המשקל של הקטע $[a,b]$ ביחס לפולינום להיות $P(b)-P(a)$. האם קיימת חלוקה של הקטע $[-1,1]$ לקטעים שחורים ולבנים, כך שלכל פולינום ממעלה לכל היותר n, סכום המשקלים של הקטעים הלבנים ביחס לפולינום שווה לסכום המשקלים של הקטעים השחורים ביחס לפולינום:
    א. עבור $n=2$?
    ב. * עבור $n\geq 2$ כללי?

בתאבון!