

פולינומים

1. שישה מספרים ממשיים מקיימים:

$$a_1 < b_1, \quad b_1 < b_2 < b_3, \quad a_1 < a_2 < a_3$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

מה יותר גדול a_3 או b_3 ?

2. פרקו לגורמים $x^4 + 16x^2 - 4x + 99$.

3. פולינום $p(x)$ הוא חיובי לכל x . הראו כי אפשר לרשום אותו כסכום ריבועים של שני פולינומים.

4. נתון פולינום p מתוקן (מקדם מוביל = 1) שדרגתו גדולה מ-0. האם יתכן, שלכל x שלם או חצי-שלם, $p(x)$ יהיה מספר שלם?

5. פולינום p בעל מקדמים שלמים מקיים $p(5) = 25$, $p(14) = 16$, $p(16) = 36$. מצאו את כל הערכים האפשריים עבור $p(10)$.

6. נתון מספר מהסוג $11\dots1122\dots2233\dots3366\dots6677\dots7788\dots89$ (הספרות 1, 2, 3, 6, 7 מופיעות N פעמים כל אחד, ו-8 מופיע N-1 פעמים. האם יתכן שמספר זה ראשוני?

7. הראו שהפולינום $x^5 + 5x^4 + 3$ אי-פריק.

8. האם $5774^{5774} + 5775$ ראשוני?

9. הראו כי

$$2^{n-1} \cdot \sin(\alpha) \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) \dots \sin\left(\alpha + \frac{n-1}{n} \cdot 2\pi\right) = \sin(n\alpha)$$

10. נסמן ב- $\sigma(n)$ את סכום הספרות של n ברישום העשרוני. האם קיים n עבורו

$$\sigma(n^k) < \sigma(n) \quad k = 2, 3, 4, 5, \dots, 1000.$$

בתאבון!