תרגיל מספרים

1. יהי n מספר שמתחלק ב-4. סידרו את כל המחלקים שלו
לפי הסדר $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$.
הוכיחו שקיים i כך ש $d_i - d_{i-1} = 2$.

2. סדרה $a_0, a_1, \dots, a_n$ נקראת ריבועית אם לכל $0 \le i \le n-1$ מתקיים $|a_{i+1} - a_i| = i^2$.
א. הראו כי לכל a, b מספרים שלמים קיימת סדרה ריבועית $a_0, a_1, \dots, a_n$ כך
ש- $a_0 = a; a_n = b$
ב.מצאו את ה-n המינימלי עבורו קיימת סדרה ריבועית עבורה $a_0 = 0; a_n = 1996$.

3. יהי n מספר טבעי, נתון שלכל $1 \le k \le 99$ המספר $\frac{1^k + \cdots + n^k}{n}$ הוא שלם. הוכיחו כי n לא מתחלק באף מספר בין 2 ל- 100.

4. יהיו n, a, b מספרים טבעיים, $n \ge 2$ כך שהמספר $k = \frac{a^n + b^n}{1 + (ab)^{n-1}}$ הוא שלם. מצאו את כל הערכים האפשריים של k.

5. מצאו את כל המספרים n כך שקיימת פונקציה $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ עבורה כל הפונקציות $f(x), f(x) + x, \dots, f(x) + 2019x$ הן חח"ע ועל.

6. עבור מספר טבעי n נסמן ב-$d(n)$ את כמות המחלקים של n. מספר טבעי m נקרא **חליק ביותר** אם לכל $n < m$ מתקיים $d(n) < d(m)$.
א. הראו כי יש מספר סופי של זוגות (a, b) של מספרים חליקים ביותר כך ש $a|b$ וגם לא קיים מספר חליק ביותר c המקיים $a < c < b$.
ב. הראו כי לכל מספר ראשוני p קיימים אינסוף מספרים חליקים ביותר r עבורו גם pr חליק ביותר.

7. הראו כי לכל מספר ראשוני p ומספר טבעי m שזר ל- p קיימים אינסוף מספרים ראשוניים אשר לא מחלקים אף אחד מהמספרים מהצורה $n^p - p^m$ כאשר n מספר שלם.

בתאבון!