יונים בתורת המספרים

1. הראו כי לכל מספר N שקטן מ-2^n קיים מספר שמתחלק ב-N וברישום העשרוני שלו מופיעות לכל היותר n ספרות, שכולן שייכות לקבוצה $\{0,1,8,9\}$.

2. לכל $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{Z}$ הראו כי $\prod_{1\le i<j\le n}\left(a_j-a_i\right)$ מתחלק ב-$\left(n-1\right)\cdot ... \cdot 3^{n-3}\cdot 2^{n-2}$.

3. עבור איזה n קטן ביותר בכל קבוצה של n שלמים בהכרח ניתן למצוא 4 מספרים שונים, a,b,c,d כך ש-$a+b-c-d$ מתחלק ב-20?

4. המספר p ראשוני. בוחרים תמורה $a_1,a_2,...,a_p$ של $1,2,...,p$. מהי הכמות המרבית של שאריות שונות מודולו p מבין המספרים $1\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3,..., p\cdot a_p$?

5. נתונה קבוצה של 1985 מספרים טבעיים שונים. כל מחלק ראשוני של כל אחד מהמספרים בקבוצה קטן או שווה ל-23. הראו כי ניתן לבחור 4 מספרים שונים בקבוצה זו שמכפלתם היא חזקה רביעית של מספר שלם.

6. הראו שכל מספר שלם $n>2$ הוא סכום של שני מספרים חסרי ריבועים.

7. מספר n שלם חיובי, $m=2n$. כל מספר $a_{i,j}$ הוא 0 או ±1, לכל $1\le i\le n$, $1\le j\le n$. נתונה מערכת של n משוואות עבור m נעלמים $x_1,x_2,...,x_m$:

$$a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+...+a_{i,m}x_m=0.$$

עבור $i=1,2,...,n$. הראו שלמערכת יש פתרון לא טריביאלי (לא כל x_j מתאפס) במספרים שלמים שערכים המוחלטים שלהם הם לכל היותר m.

8. נתונים $m,n\ge 2$ שלמים חיוביים, ומספרים שלמים $a_1,a_2,...,a_n$ שאף אחד מהם לא מתחלק ב-m^{n-1}. הראו שקיימים מספרים שלמים $e_1,e_2,...,e_n$, לא כולם 0, שמקיימים $|e_i|<m$ לכל i, כך ש-$e_1a_1+e_2a_2+e_3a_3+...+e_na_n$ מתחלק ב-m^n.

9. נתון N שלם חיובי. הראו שלכל מספר ממשי α קיים קירוב רציונאלי $\frac{m}{n}$ כך ש-

$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nN}$ (בלי שימוש בשבר משולב).

10. נתונים $n\ge 2$ מספרים שלמים שונים $a_1,a_2,...,a_n$ שלא מתחלקים ב-n, וגם $a_1+a_2+...+a_n$ לא מתחלק ב-n. הוכיחו שניתן לבחור n תתי-קבוצות שונות (כולל הקבוצה הריקה) שבכל אחד מהן סכום המספרים מתחלק ב-n.

בתאבון!