

נזק בספרייה

בספרייה 100 ספרים הממוספרים מ-1 עד 100 שעמדו על פי הסדר.

1. בוקר בהיר אחד נזק הגיע לספרייה ובלגן את כל הספרים.

בערב של אותו יום הספרנית נדהמה מהנזק הנוראי שנגרם לספרייה. הספרנית רוצה להחזיר את הספרים לסידורם המקורי, מה כמות הפעולות המינימלית שהיא תצטרך לעשות אם בכל פעולה מותר לספרנית:

א. להחליף בין כל שני ספרים שכנים. ב. להחליף בין כל שני ספרים.
ג. להוציא שלושה ספרים ממקומם ולהכניס את שלושתם למקומות הריקים בסדר שתבחר.

ד. להעביר ספר לבחירתה לסוף. ה. להעביר ספר אחד לכל מקום שתבחר.

2. למחרת בבוקר הנזק שוב הגיע לספרייה וראה שהספרנית המרושעת סידרה את הספרים מחדש. הנזק שוב בלגן את הכל כרצונו והחליט כל בוקר להגיע לספרייה ולבלגן k ספרים, כלומר לעשות תמורה על k ספרים לבחירתו. הספרנית בתורה בכל ערב מסדרת n ספרים, כלומר עושה תמורה על n ספרים לבחירתה.

נסמן ב- $F(k, n)$ את כמות הספרים שהספרנית יכולה לשים במקומם בערב של יום מסוים. חשבו את $F(k, n)$ כאשר: א. $n \geq k + 2$. ב. $k = 2, n = 3$. ג. $k = 3, n = 4$.

ד. נניח שבספרייה יש $S \gg k$ ספרים. חשבו את $F(2k - 1, 2k)$ עד כדי קבוע חיבורי שלא תלוי ב- S, k .

ה. עבור k קבוע, האם נכון ש- $F(2k - 1, 2k)$ גדל מונוטונית כתלות ב- S ?

3. בספרייה S ספרים. כמות הספרים שעומדים במקומם נספרת לאחר מהלכה של הספרנית.

א. הספרנית מחליפה בין כל שני ספרים לבחירתה ונזק בין כל שני ספרים עוקבים. כמה ספרים הספרנית יכולה להעמיד במקום?

ב. נזק עדיין מחליף בין שני ספרים עוקבים אבל הספרנית יכולה לסדר שלושה ספרים לבחירתה. הוכיחו כי הספרנית יכולה להעמיד לפחות חמישית מהספרים במקום אך נזק יוכל לדאוג לכך שלפחות שליש מהספרים לא עומדים במקום.

4. נזק יכול לבלגן n ספרים עוקבים והספרנית יכולה לסדר $5n$ ספרים עוקבים. הוכיחו כי קיים $\alpha \in (0, 1)$ כך שללא תלות בכמות הספרים בספרייה הספרנית תוכל להביא למקום לפחות α מהספרים.

5. הספרנית מסדרת k ספרים עוקבים ונזק יכול להחליף כל שני ספרים לבחירתו. א. הוכיחו כי כמות הספרים שהספרנית יכולה לשים במקומם חסומה מלמעלה על ידי קבוע שלא תלוי בכמות הספרים בספרייה.

ב. הוכיחו כי אם כמות הספרים בספרייה גדולה ביחס ל- k אז הספרנית לא תוכל להביא אף ספר למקומו.