סדר כפלי

1. מה הסדר של 2 מודולו 3^n?

2. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים שלא ניתן להציגם בצורה:
א. $a^2 + b^2 + c^2$ כאשר a, b, c שלמים.
ב. $a^3 + b^3 + c^3$ כאשר a, b, c שלמים.
ג. $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 + g^6$ כאשר $a, b, \dots, g$ שלמים.

3. הציגו את $\frac{3^{60}-1}{80}$ כסכום של חזקות רביעיות של מספרים שלמים, עם כמות מינימלית של מחוברים.

4. נניח כי $(m,n)=1$. הראו כי כל מחלק d של m^2+mn+n^2 מקיים $d \neq 2 \pmod 3$.

5. הוכיחו כי לכל ראשוני p קיים n עבורו $6^n+3^n+2^n-1$ מתחלק ב- p.

6. עבור p ראשוני, a שלם:
א. המשוואה $x^2 = a \pmod p$ אינה פתירה אמ"ם $a^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod p$.
ב. מתי $x^3 = a \pmod p$ פתיר?

7. יהי p ראשוני, $m = \frac{4^p-1}{3}$. הראו כי $2^{m-1} = 1 \pmod m$.

8. מצאו את כל זוגות הראשוניים p, q כך ש $pq | 5^p + 5^q$.

9. מצאו את כל הזוגות של ראשוניים $p > q > 3$ עבורם $(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1$ מתחלק ב-$(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1$.

10. יהי p ראשוני. הראו כי קיימים אינסוף מספרים $q = 1 \pmod p$.