1. נתונים 100 כרטיסים ממוספרים, מ-1 עד 100. יוסי מסדר את הכרטיסים בשלישיות, כך שבכל שלישייה המספרים זרים בזוגות. כל כרטיס יכול להשתתף בשלישייה אחת בלבד. מהי הכמות המרבית של שלישיות שהוא יוכל ליצר?

פתרון. אפשר לעשות 25 שלשות: $(1,2,3),(5,6,7),(9,10,11),...,(97,98,99)$ (מכל 4 מספרים רצופים נלקחו 3).
לא ניתן לעשות יותר, כי אז יהיו 26 שבכים שיכילו 78 מספרים, מתוכם לפחות 28 זוגיים ושניים באותו שובך.

2. משולש ABC שווה-שוקיים: $\sphericalangle ABC = 30^\circ = \sphericalangle ACB$. על הצלע BC נבחרות נקודות M ו-N, כך ש- $\sphericalangle MAN = 60^\circ$. הצלע BC מחולקת על ידי M ו-N ל-3 חלקים, שאחד מהם הוא קטע MN. האם יתכן כי MN גדול יותר מאשר כל אחד מבין שני החלקים האחרים? האם יתכן כי MN קטן יותר מאשר כל אחד מבין שני החלקים האחרים?

פתרון. לה"כ הסדר על BC הוא B, M, N, C. נקפל את המשולש ביחס לקווים AM ו-AN: נניח כי AMN נשאר על השולחן, נקודה B עוברת לנקודה 'B שסימטרית ל-B ביחס ל-AM, נקודה C עוברת ל-'C שסימטרית ל-C ביחס ל-AN. מכיוון שהזווית $\sphericalangle MAN = 60^\circ$ היא בדיוק חצי מ- $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, אז 'B ו-'C על אותה הקרן מ-A.
מכיוון ש- $AB' = AB = AC = AC'$, בעצם 'B ו-'C היא אותה נקודה. במשולש B'MN הזווית 'B היא 60°. זאת לא הזווית הגדולה ביותר ולא הקטנה ביותר, לכן הצלע מולה היא לא הצלע הקטנה ביותר ולא הקטנה ביותר.

3. פתרו בשלמים: $10^n = a^3 + b^3$.

פתרון. נחשוב על משוואה כללית יותר $2^m \cdot 5^k = a^3 + b^3$. אם $p \mid a,b$ ראשוני, אז p בהכרח 2 או 5, וניתן לחלק את שני האגפים ב- p^3.
לכן אפשר להניח כי a זר ל- b, ואחר-כך נכפיל במחלק משותף.
אז $2^m \cdot 5^k = \left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a+b\right)$.
מודולו 5 הפעולה $x \mapsto x^3$ פעולה הפיכה. לכן אם $a^3 + b^3$ מתחלק ב-5 אז גם $a+b$ מתחלק ב-5. במילים אחרות, אם $a^3 = -b^3 \pmod 5$ אז גם $a = -b \pmod 5$. במקרה זה $a^2 - ab + b^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \pmod 5$, לכן גם $a = 0 \pmod 5$, ובאופן דומה גם $b = 0 \pmod 5$, אבל אמרנו כי a זר ל- b.
נסתכל על הזוגיות. אם a ו- b זוגיים, הם לא זרים. אם a זוגי ו- b אי-זוגי, או להפך, אז גם $a+b$ וגם $a^2 - ab + b^2$ אי-זוגיים. אם a ו- b אי-זוגיים, אז $a+b$ זוגי אבל $a^2 - ab + b^2$ אי-זוגי.

לכן a^2-ab+b^2 הוא ±1 אבל הוא אי-שלילי, לכן $a^2-ab+b^2=1$.
לכן $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=1$ ולכן $|b|\le1$, כמו כן $|a|\le1$.
זה משאיר לנו שתי אופציות: $a^3-b^3=2$ או $a^3-b^3=1$.
במקרה $a^3-b^3=2$ אם נכפיל את ב- 2^m5^k על מנת לפתור את השאלה המקורית נקבל $10^n=2^{3k+1}5^{3m}$ וזה לא יתכן.
לכן צריך להתחיל מזוג מספרים זרים $a^3-b^3=1$ שזה $(0,-1)$ או $(1,0)$ והפתרון הכללי יהיה $\left(10^\ell,0\right)$ או $\left(0,-10^\ell\right)$.

4. מספרים ממשיים a,b,c מקיימים $a^2b+b^2c+c^2a>a^2c+c^2b+b^2a$. מה גדול יותר: $a^4b+b^4c+c^4a$ או $a^4c+c^4b+b^4a$?

פתרון ראשון. את התנאי אפשר לנסח בתור $a^2b+b^2c+c^2a-\left(a^2c+c^2b+b^2a\right)>0$
קריא
$$a^2(b-c)+bc(b-c)+\left(c^2-b^2\right)a>0$$
$$a^2(b-c)+bc(b-c)+\left(c^2-b^2\right)a>0$$
$$\left(a^2-a(b+c)+bc\right)(b-c)>0$$
$$(a-b)(a-c)(b-c)>0$$

צרי למצוא סימן של
$$\begin{aligned}
&a^4b+b^4c+c^4a-\left(a^4c+c^4b+b^4a\right)=\\
&=a^4(b-c)+bc\left(b^3-c^3\right)-a\left(b^4-c^4\right)=\\
&=(b-c)\left(a^4-a\left(c^3+c^2b+cb^2+b^3\right)+bc\left(b^2+bc+c^2\right)\right)=\\
&=(b-c)\left(a^4-ab^3-c^3a+c^3b-c^2ba+c^2b^2-cb^2a-cb^3\right)=\\
&=(b-c)(a-b)\left(a\left(a^2+ab+b^2\right)-c^3-c^2b-cb^2\right)=\\
&=(b-c)(a-b)\left(a^3-c^3+a^2b-c^2b+ab^2-cb^2\right)=\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)\left(a^2+ac+c^2+ab+bc+b^2\right)
\end{aligned}$$
נשים לב כי
$$a^2+ac+c^2+ab+bc+b^2=\frac{1}{2}\left((a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right)$$
דבר זה חיובי, אלה אם כן $a+b=b+c=c+a=0$ אבל אז גם $a=b=c=0$.
לכן אם $\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)-\left(a^2c+c^2b+b^2a\right)=(a-b)(a-c)(b-c)>0$
אז גם $a^4b+b^4c+c^4a-\left(a^4c+c^4b+b^4a\right)>0$ כי זה אותו דבר כפול מספר חיובי.

פתרון שני. $\sum_{cyc}\left(a\cdot b^2-b\cdot a^2\right)$ הוא פעמיים שטח המכוון של משולש שקודקודיו הם $\begin{pmatrix}a\\a^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\b^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\c^2\end{pmatrix}$. היות שפונקציה x^2 קמורה, סימן השטח שווה לסימן התמורה (a,b,c) יחסית לסדרה עולה, הרי אם הסדרה עולה אז השטח חיובי.

באופן דומה $\sum_{cyc}\left(a\cdot b^4-b\cdot a^4\right)$ הוא כמו שטח המשולש $\begin{pmatrix}a\\a^4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\b^4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\c^4\end{pmatrix}$, שזה אותו דבר, כי גם x^4 פונקציה קמורה.

5. למשתה בארמון המלכותי מוזמנים n אבירים. על כל אחד מהם ידוע, מי הם החברים שלו (חברות היא הדדית). הקוסם מתבקש להושיב אותם סביב שולחנות עגולים, בכל שולחן צריך להושיב שניים לפחות, כך שליד כל אביר מכל צד ישב חבר שלו. הקוסם אמר מראש שאם יש k אבירים שאף שניים מהם לא חברים זה של זה וקבוצת כל האבירים שהם חברים של לפחות אחד מהם מכילה פחות מ-k אבירים, אז אין ביכולתו להושיב את כולם כמו שצריך.
האם ההפך נכון: אם התנאי שהקוסם אמר לא מתקיים לאף k אבירים, אז הוא יוכל להושיב אותם.

פתרון. זה שהתנאי של הקוסם הכרחי, ברור. אכן, אם יש k אבירים שהם לא חברים, צריך להושיב אותם בנפרד, ומשמאל לכל אחד מהם צריך להושיב חבר שלו.
נוכיח שזה גם תנאי מספיק. נרשום את שמות של כל האבירים פעמיים: בצד ימין של הדף נרשום את כל השמות בכחול, ומצד שמאל של הדף נרשום כל שם שוב באדום. נחבר כל שם כחול לשם באדום אם הם חברים (אף אחד לא חבר של עצמו). זה גרף דו-צדדי. כעת נסה למצוא זיווג.
אם נמצא זיווג, אז נוכל להגדיר לכל אביר X אביר הבא אחריו Y: נחפש את שם של X בכחול ונבדוק איזה שם אדום מתאים לו. זו פונקציה חח"ע ועל, וזה מגדיר לכל אביר מי ישב לשמאלו. מכיוון שזו תמורה, זה מחלק את האבירים למעגלים, מש"ל.
אם לא ניתן למצוא זיווג, אז לפי משפט Hall יש קבוצה M של m אבירים שיש להם פחות מ-m חברים. נחלק את M לשתי מחלקות H זה כאלה שיש להם חברים ב-M, ו-K זה כאלה שאין להם חברים ב-M. יהיו L כל האבירים שיש להם חברים ב-K, לאו דווקא ב-M (בעצם, הם הכרך לא ב-M). אז כל מי שנמצא ב-$\mathrm{L}\bigcup\mathrm{H}$ הם חברים של מישהו שנמצא ב-M, לכן $|\mathrm{L}|+|\mathrm{H}|<m=|\mathrm{K}|+|\mathrm{H}|$, לכן $|\mathrm{L}|<|\mathrm{K}|$. ברור מהגדרה שב-K האנשים הם ;לא חברים זה של זה, וקבוצת החברים שלהם קטנה מהם הרי $|\mathrm{L}|<|\mathrm{K}|$, כלומר בדיוק התנאי של הקוסם לא מתקיים.

1. נתונים 100 כרטיסים ממוספרים, מ-1 עד 100. יוסי מסדר את הכרטיסים בשלישיות, כך שבכל שלישייה המספרים זרים בזוגות. כל כרטיס יכול להשתתף בשלישייה אחת בלבד. מהי הכמות המרבית של שלישיות שהוא יוכל ליצר?

פתרון. אפשר לעשות 25 שלשות: $(1,2,3),(5,6,7),(9,10,11),\dots,(97,98,99)$
(מכל 4 מספרים רצופים נלקחו 3).
לא ניתן לעשות יותר, כי אז יהיו 26 שבכים שיכילו 78 מספרים, מתוכם לפחות 28 זוגיים ושניים באותו שובך.

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות
$$f\left(y+x\cdot f\left(x+y\right)\right)+f\left(x+y\cdot f\left(x+y\right)\right)=f\left(x+f\left(y\right)\right)\cdot f\left(f\left(x\right)+y\right)+f\left(f\left(x\right)\right)+y$$
לכל x,y ממשיים.

פתרון. אם $x=0$ נקבל
$$(1)\quad f\left(y\right)+f\left(y\cdot f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)\cdot f\left(f\left(0\right)+y\right)+f\left(f\left(0\right)\right)+y$$
אם $y=0$ אז
$$(2)\quad f\left(x\cdot f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)=f\left(x+f\left(0\right)\right)\cdot f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(f\left(x\right)\right)$$
אם נציב $x=y$ במשוואה ראשונה נקבל אגף שמאל כמו במשוואה (1) נקבל אגף שמאל בדיוק כמו במשוואה (2), לכן גם אגף ימין אותו דבר כלומר
$$(3)\quad f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(0\right)\right)+x$$
מכאן נובע שהפונקציה חח"ע ועל.

ניקח x עבורו $f\left(x\right)=0$, במשוואה (2):
$$f\left(0\right)+0=f\left(x+f\left(0\right)\right)\cdot f\left(0\right)+f\left(0\right)$$
$$0=f\left(x+f\left(0\right)\right)\cdot f\left(0\right)$$
כאן שתי אפשרויות: או $f\left(0\right)=0$ או $f\left(x+f\left(0\right)\right)=0$.
במקרה השני $f\left(x+f\left(0\right)\right)=f\left(x\right)$ אבל f חח"ע $f\left(0\right)=0$ בכל מקרה.

ניתן כעת לפשט את (3): $f\left(f\left(x\right)\right)=x$.
נשכתב את (2): $f\left(x\cdot f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(f\left(x\right)\right)$
$$(4)\quad f\left(x\cdot f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot x+x$$

נציב ב-(4) את $f\left(x\right)$ במקום x ונקבל:
$$(5)\quad f\left(f\left(x\right)\cdot x\right)+x=f\left(x\right)\cdot x+f\left(x\right)$$

נחסיר את (4) ו-(5) ונקבל $x = f(x)$.

הצבת פונקציית הזהות במשוואה המקורית תיתן:

$$\left(\cancel{x} + x\cdot(x+y)\right) + \left(\cancel{x} + y\cdot(x+y)\right) = (x+y)\cdot(x+y) + \cancel{x} + \cancel{x}$$

וזה ברור.

3. פתרו בשלמים: $10^n = a^3 + b^3$.

פתרון. נחשוב על משוואה כללית יותר $2^m \cdot 5^k = a^3 + b^3$. אם $p \mid a,b$ ראשוני, אז p בהכרח 2 או 5, וניתן לחלק את שני האגפים ב-p^3.

לכן אפשר להניח כי a זר ל-b, ואחר-כך נכפיל במחלק משותף.

אז $2^m \cdot 5^k = \left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a+b\right)$.

מודולו 5 הפעולה $x \mapsto x^3$ פעולה הפיכה. לכן אם $a^3 + b^3$ מתחלק ב-5 אז גם $a+b$ מתחלק ב-5. במילים אחרות, אם $a^3 = -b^3 \pmod 5$ אז גם $a = -b \pmod 5$. במקרה זה $a^2 - ab + b^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \pmod 5$, לכן גם $a = 0 \pmod 5$, ובאופן דומה גם $b = 0 \pmod 5$, אבל אמרנו כי a זר ל-b.

נסתכל על הזוגיות. אם a ו-b זוגיים, הם לא זרים. אם a זוגי ו-b אי-זוגי, או להפך, אז גם $a+b$ וגם $a^2 - ab + b^2$ אי-זוגיים. אם a ו-b אי-זוגיים, אז $a+b$ זוגי אבל $a^2 - ab + b^2$ אי-זוגי.

לכן $a^2 - ab + b^2$ הוא ± 1 אבל הוא אי-שלילי, לכן $a^2 - ab + b^2 = 1$.

לכן $\left(a - \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \tfrac{3}{4}b^2 = 1$ ולכן $|b| \le 1$, כמו כן $|a| \le 1$.

זה משאיר לנו שתי אופציות: $a^3 - b^3 = 2$ או $a^3 - b^3 = 1$.

במקרה $a^3 - b^3 = 2$ אם נכפיל את ב-$2^m 5^k$ על מנת לפתור את השאלה המקורית נקבל $10^n = 2^{3k+1} 5^{3m}$ וזה לא יתכן.

לכן צריך להתחיל מזוג מספרים זרים $a^3 - b^3 = 1$ שזה $(0,-1)$ או $(1,0)$ והפתרון הכללי יהיה $\left(10^\ell, 0\right)$ או $\left(0, -10^\ell\right)$.

4. למשתה בארמון המלכותי מוזמנים n אבירים. על כל אחד מהם ידוע, מי הם החברים שלו (חברות היא הדדית). הקוסם מתבקש להושיב אותם סביב שולחנות עגולים, בכל שולחן צריך להושיב שניים לפחות, כך שליד כל אביר מכל צד ישב חבר שלו. הקוסם אמר מראש שאם יש k אבירים שאף שניים מהם לא חברים זה של זה וקבוצת כל האבירים שהם חברים של לפחות אחד מהם מכילה פחות מ-k אבירים, אז אין ביכולתו להושיב את כולם כמו שצריך.
האם ההפך נכון: אם התנאי שהקוסם אמר לא מתקיים לאף k אבירים, אז הוא יוכל להושיב אותם.

פתרון. זה שהתנאי של הקוסם הכרחי, ברור. אכן, אם יש k אבירים שהם לא חברים, צריך להושיב אותם בנפרד, ומשמאל לכל אחד מהם צריך להושיב חבר שלו.
נוכיח שזה גם תנאי מספיק. נרשום את שמות של כל האבירים פעמיים: בצד ימין של הדף נרשום את כל השמות בכחול, ומצד שמאל של הדף נרשום כל שם שוב באדום. נחבר כל שם כחול לשם באדום אם הם חברים (אף אחד לא חבר של עצמו). זה גרף דו-צדדי. כעת נסה למצוא זיווג.
אם נמצא זיווג, אז נוכל להגדיר לכל אביר X אביר הבא אחריו Y: נחפש את שם של X בכחול ונבדוק איזה שם אדום מתאים לו. זו פונקציה חח"ע ועל, וזה מגדיר לכל אביר מי ישב לשמאלו. מכיוון שזו תמורה, זה מחלק את האבירים למעגלים, מש"ל.
אם לא ניתן למצוא זיווג, אז לפי משפט Hall יש קבוצה M של m אבירים שיש להם פחות מ-m חברים. נחלק את M לשתי מחלקות H זה כאלה שיש להם חברים ב-M, ו-K זה כאלה שאין להם חברים ב-M. יהיו L כל האבירים שיש להם חברים ב-K, לאו דווקא ב-M (בעצם, הם הכרך לא ב-M). אז כל מי שנמצא ב-$\mathrm{L}\cup\mathrm{H}$ הם חברים של מישהו שנמצא ב-M, לכן $|\mathrm{L}|+|\mathrm{H}|<m=|\mathrm{K}|+|\mathrm{H}|$, לכן $|\mathrm{L}|<|\mathrm{K}|$. ברור מהגדרה שב-K האנשים הם ;לא חברים זה של זה, וקבוצת החברים שלהם קטנה מהם הרי $|\mathrm{L}|<|\mathrm{K}|$, כלומר בדיוק התנאי של הקוסם לא מתקיים.

5. לכל מחומש מישורי ABCDE נגדיר מדד

$$f\left(\mathrm{ABCDE}\right)=\frac{S_{\mathrm{ABC}}\cdot S_{\mathrm{BCD}}\cdot S_{\mathrm{CDE}}\cdot S_{\mathrm{DEA}}\cdot S_{\mathrm{EAB}}}{S_{\mathrm{ABD}}\cdot S_{\mathrm{BCE}}\cdot S_{\mathrm{CDA}}\cdot S_{\mathrm{DEB}}\cdot S_{\mathrm{EAC}}}.$$

א. במרחב נתונים שני מישורים לא מקבילים. הטלה מרכזית ממישור אחד למישור אחר מעבירה את המחומש ABCDE למחומש A'B'C'D'E'.
הראו כי $f\left(\mathrm{ABCDE}\right)=f\left(\mathrm{A'B'C'D'E'}\right)$.

ב. במחומש ABCDE האלכסונים AC ו-BD נפגשים בנקודה $\hat{\mathrm{E}}$, האלכסונים BD ו-CE נפגשים בנקודה $\hat{\mathrm{A}}$, וכו'. הראו כי $f\left(\mathrm{ABCDE}\right)=f\left(\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{D}}\hat{\mathrm{E}}\right)$.

א. פתרון ראשון. נסמן יהא O מרכז ההטלה. מרחק מ-O למישור ABCDE יסומן h, ולמישור השני h'.

אז $S_{\mathrm{XYZ}}=\dfrac{V_{\mathrm{OXYZ}}}{3h}$, $S_{\mathrm{X'Y'Z'}}=\dfrac{V_{\mathrm{OX'Y'Z'}}}{3h'}$, כאשר $\mathrm{X,Y,Z}\in\{\mathrm{A,B,C,D,E}\}$.

נחלק נוסחה אחת באחרת ונקבל

אבל $\dfrac{S_{\mathrm{X'Y'Z'}}}{S_{\mathrm{XYZ}}}=\dfrac{h}{h'}\cdot\dfrac{V_{\mathrm{OX'Y'Z'}}}{V_{\mathrm{OXYZ}}}=\dfrac{h}{h'}\cdot\dfrac{\mathrm{OX'\cdot OY'\cdot OZ'}}{\mathrm{OX\cdot OY\cdot OZ}}$.

אם נחשב $\dfrac{f(\mathrm{A'B'C'D'E'})}{f(\mathrm{ABCDE})}$ באמצעות נוסחה זאת, אז יהיה $\left(\dfrac{h}{h'}\right)^5$ במונה ובמחנה, וגם $\left(\dfrac{\mathrm{OX'}}{\mathrm{OX}}\right)^3$ לכל $\mathrm{X}\in\{\mathrm{A,B,C,D,E}\}$ במונה ובמחנה, והכול מתכזז.

פתרון שני. נוכל לסמן יחס כפול של ישרים XP,XQ,XR,XS ב-$[\mathrm{P,Q,R,S}]_{\mathrm{X}}$.

נקודות חיתוך של AB ו-AE אם הישר CD יסומנו 'B ו-'E בהתאמה. אז

$$[\mathrm{B,E,C,D}]_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{B'C\cdot E'D}}{\mathrm{E'C\cdot B'D}}=\frac{S_{\mathrm{AB'C}}\cdot S_{\mathrm{AE'D}}}{S_{\mathrm{AE'C}}\cdot S_{\mathrm{AB'D}}}=$$

$$=\frac{\mathrm{AB'\cdot AC}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{BAC}\cdot\mathrm{AE'\cdot AD}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{EAD}}{\mathrm{AE'\cdot AC}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{EAC}\cdot\mathrm{AB'\cdot AD}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{BAD}}=$$

$$=\frac{\mathrm{AB\cdot AC}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{BAC}\cdot\mathrm{AE\cdot AD}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{EAD}}{\mathrm{AE\cdot AC}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{EAC}\cdot\mathrm{AB\cdot AD}\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{BAD}}=\frac{S_{\mathrm{ABC}}\cdot S_{\mathrm{AED}}}{S_{\mathrm{AEC}}\cdot S_{\mathrm{ABD}}}$$

מכאן רואים כי $f(\mathrm{ABCDE})$ הוא שורש של מכפלה ציקלית של ביטויים אלה.
אבל ידוע כי יחס כפול הוא שמורה פרויקטיבית, לכן גם f.

ב. נשים לב כי

$$[\mathrm{B,E,C,D}]_{\mathrm{A}}=[\mathrm{B,E,\hat{D},\hat{C}}]_{\mathrm{A}}=[\mathrm{B,E,\hat{D},\hat{C}}]=$$
$$=[\mathrm{B,E,\hat{D},\hat{C}}]_{\hat{\mathrm{A}}}=[\mathrm{\hat{E},\hat{B},\hat{D},\hat{C}}]_{\hat{\mathrm{A}}}=[\mathrm{\hat{B},\hat{E},\hat{C},\hat{D}}]_{\hat{\mathrm{A}}}$$

אם משיכים את הפתרון השני, f הוא מכפלה של יחסים כפולים, ומכאן הכול מתקבל.

אם ממשיכים את הפתרון הראשון, ניתן להסיק כי $\mathrm{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}}$ שקול פרויקטיבית ל-ABCDE, כי מחומש נקבע ע"י יחסים כפולים, ולכן כל שמורה פרויקטיבית עבורם זהה. אכן, אם שולחים ע"י העתקה פרויקטיבית את A ל-$(1:0:0)$, את B ל-$(0:1:0)$, את C ל-$(0:0:1)$ ואת D ל-$(1:1:1)$ אז מיקום של E יקבע על ידי שני יחסים כפולים.