

1. נתונים 100 כרטיסים ממוספרים, מ-1 עד 100. יוסי מסדר את הכרטיסים בשלישיות, כך שבכל שלישייה המספרים זרים בזוגות. כל כרטיס יכול להשתתף בשלישייה אחת בלבד. מהי הכמות המרבית של שלישיות שהוא יוכל ליצר?

2. משולש ABC שווה-שוקיים: $\angle ABC = 30^\circ = \angle ACB$. על הצלע BC נבחרות נקודות M ו- N , כך ש- $\angle MAN = 60^\circ$. הצלע BC מחולקת על ידי M ו- N ל-3 חלקים, שאחד מהם הוא קטע MN . האם יתכן כי MN גדול יותר מאשר כל אחד מבין שני החלקים האחרים? האם יתכן כי MN קטן יותר מאשר כל אחד מבין שני החלקים האחרים?

3. פתרו בשלמים: $10^n = a^3 + b^3$.

4. מספרים ממשיים a, b, c מקיימים $a^2b + b^2c + c^2a > a^2c + c^2b + b^2a$. מה גדול יותר: $a^4c + c^4b + b^4a$ או $a^4b + b^4c + c^4a$?

5. למשתה בארמון המלכותי מוזמנים n אבירים. על כל אחד מהם ידוע, מי הם החברים שלו (חברות היא הדדית). הקוסם מתבקש להושיב אותם סביב שולחנות עגולים, בכל שולחן צריך להושיב שניים לפחות, כך שליד כל אביר מכל צד ישב חבר שלו. הקוסם אמר מראש שאם יש k אבירים שאף שניים מהם לא חברים זה של זה וקבוצת כל האבירים שהם חברים של לפחות אחד מהם מכילה פחות מ- k אבירים, אז אין ביכולתו להושיב את כולם כמו שצריך.

האם ההפך נכון: אם התנאי שהקוסם אמר לא מתקיים לאף k אבירים, אז הוא יוכל להושיב אותם.

בהצלחה!

1. נתונים 100 כרטיסים ממוספרים, מ-1 עד 100. יוסי מסדר את הכרטיסים בשלישיות, כך שבכל שלישייה המספרים זרים בזוגות. כל כרטיס יכול להשתתף בשלישייה אחת בלבד. מהי הכמות המרבית של שלישיות שהוא יוכל ליצר?

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות

$$f(y+x \cdot f(x+y)) + f(x+y \cdot f(x+y)) = f(x+f(y)) \cdot f(f(x)+y) + f(f(x))+y$$

לכל x, y ממשיים.

3. פתרו בשלמים: $10^n = a^3 + b^3$.

4. למשתה בארמון המלכותי מוזמנים n אבירים. על כל אחד מהם ידוע, מי הם החברים שלו (חברות היא הדדית). הקוסם מתבקש להושיב אותם סביב שולחנות עגולים, בכל שולחן צריך להושיב שניים לפחות, כך שליד כל אביר מכל צד ישב חבר שלו. הקוסם אמר מראש שאם יש k אבירים שאף שניים מהם לא חברים זה של זה וקבוצת כל האבירים שהם חברים של לפחות אחד מהם מכילה פחות מ- k אבירים, אז אין ביכולתו להושיב את כולם כמו שצריך.

האם ההפך נכון: אם התנאי שהקוסם אמר לא מתקיים לאף k אבירים, אז הוא יוכל להושיב אותם.

5. לכל מחומש מישורי ABCDE נגדיר מדד

$$f(ABCDE) = \frac{S_{ABC} \cdot S_{BCD} \cdot S_{CDE} \cdot S_{DEA} \cdot S_{EAB}}{S_{ABD} \cdot S_{BCE} \cdot S_{CDA} \cdot S_{DEB} \cdot S_{EAC}}$$

א. במרחב נתונים שני מישורים לא מקבילים. הטלה מרכזית ממישור אחד למישור אחר מעבירה את המחומש ABCDE למחומש A'B'C'D'E'.

הראו כי $f(ABCDE) = f(A'B'C'D'E')$.

ב. במחומש ABCDE האלכסונים AC ו-BD נפגשים בנקודה \hat{E} , האלכסונים BD ו-CE נפגשים בנקודה \hat{A} , וכו'. הראו כי

$$f(ABCDE) = f(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E})$$

בהצלחה!