

תרגיל מספרים



1. עבור פולינום $f(x)$ במקדמים שלמים, ראשוני p נקרא מגניב אם יש x שלם עבורו $p|f(x)$.

(א) הוכיחו שאם f לא קבוע, אז יש אינסוף ראשוניים מגניבים.

(ב) בהנחה שכל הראשוניים מגניבים, האם זה נכון של- f יש שורש שלם?

(ג) מה לגבי שורש רציונלי?

2. עבור איזה ראשוניים p אפשר לסדר את המספרים $1, 2, \dots, p$ בשלושה דרכים, a_i, b_i, c_i כך ש:

$$a_i \cdot b_i \equiv_p c_i$$

(ב) עבור איזה n אפשר למצוא a_i, b_i, c_i שהם סידור של המספרים $1, \dots, n$, ובנוסף:

$$a_i + b_i \equiv_n c_i$$

3. חשבו את המחלק המשותף המקסימלי של הזוגות הבאים:

$$(5^{5778} + 7^{5778}, 5^{5564} + 7^{5564})$$

$$(f_{f_{f_{f_{f_{5775}}}}}, f_{f_{f_{f_{f_{5770}}}}})$$

(תזכורת: f זו סדרת פיבונאצ'י המוגדרת לפי $f_1 = f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$)

4. האם כל מספר טבעי גדול מספיק הוא:

(א) סכום של שני ריבועים?

(ב) סכום של חמישה קוביות?

(ג) סכום של ריבוע, קובייה חיובית, וחזקה שישית?

(ד) סכום של עשר חזקות ארבע?

5. פתרו את המשוואות הבאות בשלמים חיוביים:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p \quad (\text{א})$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 3 \quad (\text{ב})$$

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2 \quad (\text{ג})$$

6. בהינתן $p > 5$ מצאו שלושה מספרים שונים מוד p כך ש:

$$x + y + z \equiv_p 0$$

$$xyz \equiv_p 1$$