מרכז מסה

הגדרה: נגיד שנתונים לנו נקודות $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$, ומקדמים $m_1, \dots, m_n$ (לאו דווקא חיוביים ובהמשך גם לאו דווקא ממשיים) שנקראים מסות.

א. סכום המקדמים $M = m_1 + \ldots + m_n$ נקרא המסה הכוללת.

ב. אם המסה הכוללת לא מתאפסת אז $\mathrm{G} = \frac{m_1\mathrm{A}_1 + \ldots + m_n\mathrm{A}_n}{M}$ נקרא מרכז המסה.

תכונות חשובות:

א. חוק הקיבוץ לחישוב מרכז כובד: אם מורידים חלק מהנקודות מהרשימה ומחליפים אותן במרכז הכובד שלהם, שמסתו היא המסה הכוללת של הנקודות שירדו, אז מרכז הכובד של המערכת לא ישתנה.

ב. חוק המנוף: מרכז המסה של שתי נקודות $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ נמצא על הישר שמחבר אותן ומתקיים: $\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{G}}{\mathrm{GA}_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

ג. מרכז מסה לא תלוי בבחירת מערכת צירים.
כלומר אם יש שתי מערכות צירים שונות במישור (או במרחב), ונחשב את מרכז המסה במערכת הראשונה ובמערכת השנייה, נקבל את אותה הנקודה הגיאומטרית.

ד. אם A ו-B זוג נקודות שונות, כל נקודה על הישר AB אפשר לקבל כמרכז מסה של A ו-B (כאשר בוחרים מסות בצורה נכונה).

אם A, B ו-C הן שלוש נקודות לא על ישר אחד, כל נקודה במישור ABC אפשר לקבל כמרכז מסה שלהן.

אם A, B, C, ו-D הן ארבע נקודות שלא נמצאות על מישור אחד, כל נקודה במרחב אפשר לקבל כמרכז מסה שלהן.

ה. בקודקודי משולש A, B, C מציבים מסות m_A, m_B, m_C, ומרכז מסה יסומן G.
הראו כי $\left(S_{\mathrm{BCG}} : S_{\mathrm{CAG}} : S_{\mathrm{ABG}}\right) = \left(m_\mathrm{A} : m_\mathrm{B} : m_\mathrm{C}\right)$.

הכלילו את הטענה האחרונה לארבעון במרחב!

מרכז מסה

1. בארבעון ABCD מסמנים את אמצעי הצלעות, וכל שני אמצעים של צלעות נגדיות מחברים בקו ישר. הראו כי הישרים שנוצרים נפגשים בנקודה אחת.

2. על צלעותיו BC, AC, AB של המשולש ABC נמצאות נקודות P, Q, R בהתאמה. הישרים AP, BQ, CR הן צלעות של משולש ששטחו s, והשטח של ABC הוא S.

א. בהנחה כי $\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=2$, מצאו את $\frac{s}{S}$.

ב*. באופן כללי, בטאו את $\frac{s}{S}$ באמצעות $v=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}$, $u=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$, $w=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$.

3. במרובע ABCD אמצעי הצלעות AB ו-CD הם M ו-N, ונקודות P ו-Q נמצאות על הצלעות BC ו-AD בהתאמה כך ש-$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QD}=r$. הוכיחו כי MN עובר דרך אמצע PQ, וכי PQ מחלק את MN ביחס r.

4. (IMO 1999) מצאו את כל הקבוצות הסופיות S של נקודות במישור בעלות התכונה: לכל שתי נקודות ב-S, האנך האמצעי של הקטע שמחבר אותן מהווה ציר סימטריה של S.

5. במקבילית ABCD נבחרו נקודות P ו-Q על הצלעות AB ו-BC כך ש- $\mathrm{AP}=\mathrm{CQ}$. הוכיחו כי AQ, CP, וחוצה הזווית פנימי של הזווית D של המקבילית נפגשים בנקודה אחת.

6. א. במשולש ABC מעגלים משיקים מבחוץ נוגעים בצלעות המשולש בנקודות $\mathrm{T_A},\mathrm{T_B},\mathrm{T_C}$ (לא בהמשכי הצלעות). הוכיחו כי $\mathrm{AT_A},\mathrm{BT_B},\mathrm{CT_C}$ נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו נקראת נקודת נאגל ומסומנת בד"כ N.

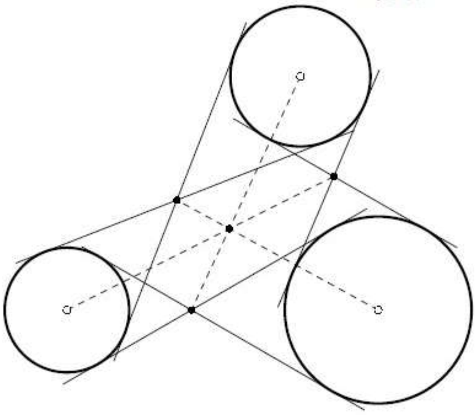
ב. הראו שנקודת נאגל של משולש האמצעים היא מרכז המעגל החסום במשולש המקורי.

ג. המעגל החסום במשולש ABC חותך את הקטע $\mathrm{AT_A}$ בשתי נקודות, הנקודה הקרובה יותר ל-A תסומן $\mathrm{Q_A}$. הראו כי $\mathrm{AQ_A}=\mathrm{NT_A}$.

מרכז מסה של מעגלים

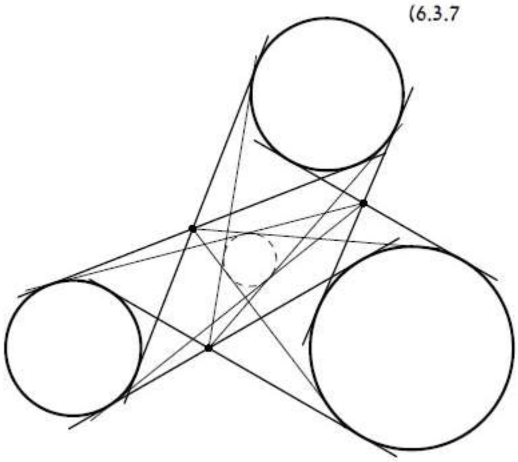
7. נתונים 3 מעגלים כמו בתמונה. בין כל שני מעגלים, העבירו זוג משיקים פנימיים משותפים, סימנו את נקודת החיתוך בין המשיקים ולאחר מכן חיברו את נקודת החיתוך בקו ישר (מקווקו) עם מרכז המעגל השלישי. הוכיחו כי שלושת הישרים המקווקוים נחתכים בנקודה אחת.

(6.3.6



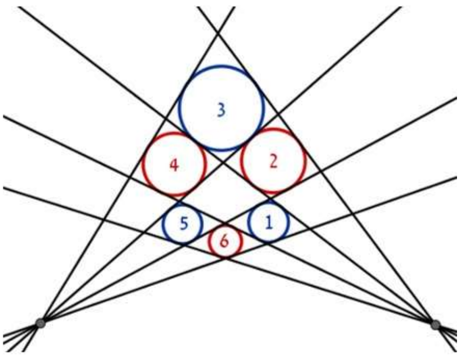
8. נתונים 3 מעגלים כמו בתמונה. בין כל שני מעגלים העבירו זוג משיקים פנימיים משותפים, וסימנו את נקודת החיתוך שלהם. לאחר מכן מכל אחת מ-3 נקודות החיתוך שהתקבלו, העבירו זוג משיקים למעגל הנגדי. באופן הזה, התקבלו 3 זוגות של משיקים כאלה, זוג אחד עבור כל מעגל. הוכיחו שקיים מעגל שמשיק ל6 הישרים.

(6.3.7



9. בציור 6 מעגלים, שמוספרו באופן מעגלי. רדיוסיהם $R_1, R_2, \dots , R_6$ בהתאמה. כל מעגל משיק ל-4 ישרים. הראו כי:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}$$



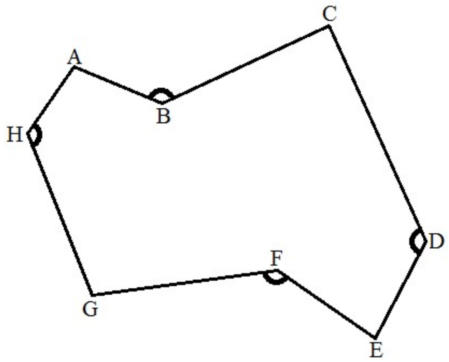
10. על הצלעות של משולש ABC בונים כלפי חוץ משולשים ABC_1, AB_1C, A_1BC, כך ש- $BCA_1 \sim CAB_1 \sim ABC_1$. הראו כי מרכז מסה של ABC מתלכד עם מרכז מסה $A_1B_1C_1$.

11. נרשום $ABC \approx DEF$ אם המשולשים לא רק דומים, אלה גם מכוונים באותה צורה. הראו שאם במישור נתונות נקודות A, B, C, X, Y, Z המקיימות

$$ABZ \approx ACY \approx BCX.$$

הראו כי $BXYZ$ מקבילית.

12. במתומן $ABCDEFGH$ מתקיים



$$360^o - \measuredangle B = \measuredangle D = 360^o - \measuredangle F = \measuredangle H$$

ובנוסף $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD} = \frac{EF}{FG} = \frac{AH}{GH}$. הוכיחו כי $BDFH$ מקבילית.

13. נתון משולש שכל זוויותיו שונות. יוסי ודני משחקים במשחק הבא. בכל מהלך יוסי מסמן נקודה אחת במישור, ודני צובע את הנקודה באדום או בכחול לפי בחירתו. יוסי מנצח אם קיימות שלוש נקודות שהוא סימן ודני צבע, שיוצרות משולש שדומה למשולש המקורי וכולו בצבע אחיד. מה המספר המינימלי של מהלכים שיוסי צריך כדי לנצח בוודאות (לכל משולש מקורי)?