k-זרימה בגרפים - הרצאה מחנה יוני לקבוצת רתם

מיכאל צ'פמן

13 בפברואר 2018

מטרות

1. נגדיר k-זרימה בגרפים ונוכיח את משפט Tutte על שקילות כל הזרימות על חבורות אבליות מגודל k.
2. נכיר ונוכיח את הקשר בין זרימה בגרף מישורי לבין צביעה בגרף הדואלי שלו.
3. נוכיח את משפט Seymour על 6-זרימה בגרפים.
4. נציג את ההשערות של Tutte על זרימה בגרפים ללא גשרים.

חידות

1. בכל גרף עם 4-זרימה קיים כיסוי מעגלים כפול.
2. הוכיחו את משפט Heawood: שילוש של המישור הוא גרף מישורי פשוט שכל פאה שלו היא משולש (זהו גרף מישורי מקסימלי בצלעות). הוכיחו כי שילוש הוא 3-צביע (קדקדית) אם ורק אם יש בו מעגל אויילר.
3. יונה וחנה משחקות משחק: נתון להם גרף המעגל C_n. יונה שמה בהתחלה על כל קדקוד של המעגל מספר בין 0 ל$(m-1)$ כך שהסכום של כל המספרים הללו מתחלק בm. לאחר מכן חנה צריכה לשים על הצלעות מספרים בין 1 ל $(m-1)$, ולתת כיוון לכל הצלעות, כך שבכל קדקוד יש עודף לפי המספר שיונה שמה שם בהתחלה מודולו m. אם חנה מצליחה לעשות זאת, היא מנצחת. אם יונה יכולה לשים מספרים על הקדקדים כך שחנה לא יכולה לעשות זאת, אז היא מנצחת. עבור איזה m-ים יונה תנצח ועבור אילו היא תפסיד (זה תלוי בn כמובן) .
4. הוכיחו כי בגרף $G=(V,E)$ יש k-זרימה אם ורק אם קיימת אוריינטציה של E עבורה לכל $\emptyset \neq U \subsetneq V$, מתקיים $|E_U^+|,|E_U^-| \geq \frac{|E_U^+|+|E_U^-|}{k}$.

1 k-זרימה ללא אפס

לאורך ההרצאה $G=(V,E)$ יהיה גרף (פשוט או מולטי-גרף). בהנתן גרף G, ניתן לכוון את צלעותיו ולקבל גרף מכוון. נסמן בE_v^- את אוסף הצלעות שיוצאות מקדקוד $v \in V$ ובE_v^+ את אוסף הצלעות הנכנסות לקדקוד זה. באופן דומה נגדיר לכל $U \subseteq V$ את E_U^- (E_U^+) בתור אוסף הצלעות שיוצאות (נכנסות) מתת קבוצה של קדקודים U.

הגדרה 1.1 בהנתן גרף $G=(V,E)$, אוריינטציה על צלעות G, וחבורה אבלית Γ, נאמר כי פונקציה $f\colon E \to \Gamma$ היא "Γ-זרימה" (Flow) אם מתקיים כי

$$\forall v \in V, \sum_{e \in E_v^+} f(e) - \sum_{e \in E_v^-} f(e) = 0$$

אם בנוסף $Im(f) \subseteq \Gamma^*$ נאמר כי f היא "Γ-זרימה ללא אפס" (Nowhere Zero Flow). במקרה ש-$\Gamma = \mathbb{Z}$ ולכל $e \in E$ מתקיים $0<|f(e)|<k$, נאמר כי f היא "k-זרימה ללא אפס". נסמן ב $\varphi(G)$ את הk הכי קטן כך שבG יש k-זרימה ללא אפס.

טענה 1.2 בגרף קשיר יש 2-זרימה ללא אפס אם ורק אם יש בו מעגל אוילר.

הוכחה: תרגיל קל. ■

הערה 1.3 כל גרף מכוון מגדיר מטריצת חילה ולהיפך. מטריצת חילה היא מטריצה ששורותיה הם קדקדי הגרף ועמודותיה הצלעות. בכל עמודה יש $+1$ בשורה של הקדקוד הנכנס ו--1 בשורה של הקדקוד היוצא. שימו לב כי זרימה היא וקטור בגרעין הימני של המטריצה, קרי אם A מטריצת החילה של גרף כלשהו, אז וקטור f יהיה זרימה אם $Af = 0$. במקרה כזה זרימה ללא אפס היא וקטור כנ"ל ללא אפסים.

טענה 1.4 בגרף קשיר $G = (V, E)$ יש $\mathbb{Z}$-זרימה ללא אפס אם ורק אם G 2-קשיר צלעית (חסר גשרים).

הוכחה: תרגיל בזמן ההרצאה.

הכיוון $\Leftarrow$ נובע מכך שהזרימה בכל חתך היא 0.

הכיוון $\Rightarrow$ הוא מעט יותר קשה. יש לכך הרבה הוכחות, ובהמשך השיעור נראה טענות כלליות שנותנות חסם של k-זרימה לכל הגרפים ללא גשרים ולא רק טוענות שיש $\mathbb{Z}$-זרימה לגרפים ללא גשרים, אבל בינתיים אתן הוכחה שתלויה רק במספר הצלעות והקדקדים בגרף.

נביט בעץ פורש של הגרף. כעת יש צלעות שלא נמצאות בעץ כיוון שהגרף 2-קשיר צלעית. כל צלע כזאת מחברת בין שני קדקדים של העץ. בין שני הקדקדים של העץ יש את המסלול שעובר בתוך העץ בין הקדקדים הללו, ויחד עם הצלע הזאת הוא יוצר מעגל. אז קיבלנו $N = |E| - |V| + 1$ מעגלים. הם מכסים את כל צלעות הגרף (חשבו למה). כעת נמספר את המעגלים בין 1 לN ונזרים על המעגל ה-i כמות של 2^i. זה מבטיח שנקבל לכל היותר $(2^{N+1} - 1)$-זרימה ללא אפס. ניתן לשפר את התוצאה הזאת ל$(N+1)$-זרימה ללא אפס עם רעיונות נוספים שנראה היום בהמשך השיעור. ■

משפט 1.5 (Tutte) נתונות שתי חבורות אבליות סופיות Γ_1, Γ_2 כך ש-$k = |\Gamma_1| = |\Gamma_1|$. אזי בגרף G יש Γ_1-זרימה ללא אפס אם ורק אם יש Γ_2-זרימה ללא אפס אם ורק אם יש k-זרימה ללא אפס.

הוכחה: תחילה נראה כי יש $\mathbb{Z}_k$-זרימה ללא אפס אם ורק אם יש k-זרימה ללא אפס.

הכיוון $\Rightarrow$ ברור, פשוט ניקח את כל הצלעות מודולו k.

עבור הכיוון $\Leftarrow$ אנחנו יכולים לקחת את כל המספרים שכתובים על הצלעות ולשכוח שהם מודולו k. כעת בכל קדקוד יש mk עודף\חוסר בזרימה כאשר m מספר שלם כלשהו. עדיין סכום כל העודפים והחוסרים חייב להיות 0 כי סופרים כך כל צלע פעם בכניסה ופעם ביציאה. אז יש גם קדקוד בעודף וגם קדקוד בחוסר.

טענת עזר: קיים מסלול מכוון בין קדקוד עם חוסר לקדקוד עם עודף. אחרת נביט בחתך S של כל הקדקדים שיש מהם מסלול לקדקוד עם עודף. מS יש רק צלעות יוצאות וכל המספרים שכתובים כרגע הם חיוביים, בסתירה לעובדה שבS יש את כל הקדקדים עם עודף.

כעת ניקח קדקוד עם חוסר v וקדקוד עם עודף w כך שיש מסלול מv לw. נחסר מכל צלע k ואז נהפוך את האוריינטציה של הצלעות. כך יש לנו עדיין רק מספרים חיוביים על הצלעות, אבל בקדקוד v יש k יותר ממה שהיה קודם ובקדקוד w יש k פחות. התהליך הזה חייב להסתיים כי הקטנו ממש את סכום העודפים והחוסרים בערך מוחלט. כשהוא מסתיים בטוח שאין עודף או חוסר באף קדקוד כי סכום כל העודפים והחוסרים הוא 0 (בלי ערך מוחלט).

כעת נרצה להראות כי אם יש Γ_1-זרימה ללא אפס אז יש Γ_2-זרימה ללא אפס. נעשה זאת באמצעות ספירה של כמות ה-Γ-זרימות ללא אפס של גרף מכוון נתון, נסמן מספר זה בתור $p_\Gamma(G)$.

אם G הוא גרף עם קדקוד אחד ו-e צלעות, אז $p_\Gamma(G) = e^{|\Gamma|-1}$ (מספר שאינו תלוי בחבורה הספציפית אלא רק בכמות האיברים שבה).

אם בG יש לפחות שני קדקדים, נביט בצלע שמחברת שני קדקדים שונים, נסמן אותה ב(v, w). אזי נביט בשני הגרפים הבאים:

1. $G \setminus (v, w)$ - הגרף שבו משמיטים את הצלע (v, w).
2. $G/(v, w)$- הגרף שבו מכווצים את הצלע (v, w) ומזהים את הקדקדים v, w לקדקוד אחד.

הגרף $G/(v, w)$ חייב להיות ללא גשרים, אבל יכול להיות כי הגרף $G \setminus (v, w)$ מכיל גשרים. נשים לב כי הנוסחה הבאה מתקיימת

$$p_\Gamma(G) = p_\Gamma(G/(v, w)) - p_\Gamma(G \setminus (v, w))$$

על ידי שימוש חוזר בנוסחה הנ"ל אנו מקטינים ממש את מספר הצלעות בגרף (ואת מספר הקדקדים בגרף הכיווץ). כך מתישהו נגיע לגרף עם גשר (שבו אין זרימה), או גרף עם קדקוד יחיד. בשני המקרים p_Γ תלוי רק ב$|\Gamma|$. ■

מסקנה 1.6 ניתן לדבר על k-זרימה ללא אפס ולהשתמש באיזה חבורה אבלית שאנחנו רוצים מהגודל המתאים.

טענה 1.7 בכל גרף עם מעגל המילטון יש 4-זרימה ללא אפס.

הוכחה: תרגיל בכיתה.

נראה $\mathbb{Z}_4$-זרימה ללא אפס. יש לנו מעגל המילטון, נזרים עליו 1. כעת כל צלע שלא במעגל מתחברת למעגל בשתי נקודות. נזרים עליה ועל החלק במעגל שהיא שותפה אליו 2. כך על כל הצלעות שבמעגל המקורי יש מספר אי-זוגי כלשהו ולכן לא אפס, וכל הצלעות שלא במעגל המקורי זורם עליהן 2. ■

2 דואליות זרימה צביעה

אחת המוטיבציות העיקריות לשאלות שונות על זרימה ללא אפס היא העובדה הבאה:

משפט 2.1 יהא G גרף מישורי (עם שיכון במישור). אזי G^* הוא k-צביע אם ורק אם בG יש k-זרימה ללא אפס.

הוכחה: תרגיל בכיתה.
ההוכחה קונסטרוקטיבית לחלוטין. אם נתונה לנו צביעה בk צבעים של הפאות, נגדיר אוריינטציה על הצלעות כך שמצד שמאל של כל צלע יש את הפאה עם הצבע הגדול יותר (הצבעים הם מספרים בין 1 לk), ונשים על כל צלע את ההפרש בין הצבע הגדול לקטן. אז כל הצלעות עם מספרים בין 1ל-$k-1$ וקל לראות שזאת זרימה. לכיוון השני, בהנתן זרימה נקבע את הפאה החיצונית להיות בצבע 0, וכל פאה שצמודה אליה תהיה בצבע כזה שההפרש בין השמאלית לימנית מודולו k יהיה המספר שכתוב על הצלע. זה מכריח כל שתי פאות צמודות להיות בצבע שונה, וזה קובע ביחידות את הצבע של כל פאה כי הזרימה על כל חתך היא אפס (ומעגל של פאות מגדיר חתך). ■

מסקנה 2.2 משפט 4-הצבעים נכון אם ורק אם לכל גרף מישורי קובי יש 3-צביעה של הצלעות. **רמז:** עבור גרף קובי (3-רגולרי), 3-צביעה של הצלעות ו-4-זרימה זה אותו הדבר.

הוכחה: תרגיל. ■

3 משפט Seymour

משפט 3.1 (Seymour) לכל גרף 2-קשיר צלעית יש 6-זרימה ללא אפס.

אנחנו נוכיח את המשפט הזה באמצעות מספר רדוקציות וטענות ביניים.

למה 3.2 גרף 2-קשיר צלעית מינימלי שמפר את המשפט דלעיל חייב להיות 3-קשיר צלעית.

הוכחה: נביט בגרף 2-קשיר צלעית מינימלי בצלעות שאין בו 6-זרימה ונניח שהוא אינו 3-קשיר צלעית. אזי קיימות שתי צלעות e_1, e_2 שהן היחידות שמחברות בין שני רכיבי קשירות של הגרף. ממינימליות הדוגמא, ניתן לכווץ את הצלע e_2 ולקבל גרף 2-קשיר צלעית קטן יותר שחייב לקיים את המשפט. לכן יש איזשהי 6-זרימה ללא אפס על הגרף המכווץ. אבל אז על e_1 זורם משהו שאינו אפס. אם נחזיר את הגרף להיות הגרף המקורי ניתן להשרות עליו 6-זרימה ללא אפס באמצעות הזרמה של $f(e_1)$ על e_2 (שתיהן באוריינטציה לכיוונים הפוכים). לכן הדוגמה הנגדית הקטנה ביותר חייבת להיות 3-קשירה צלעית. ■

הגדרה 3.3 תת גרף H של G ייקרא k סָגור (sagur) אם כל מעגל בG שנפגש עם H אבל לא מוכל כולו בH מכיל לפחות $k+1$ צלעות שאינן בH.
ה-k-סְגור (sgor) של תת גרף H של G הוא חיתוך כל הגרפים ה-k-סגורים של G המכילים את H. נסמן זאת ב$\langle H \rangle_k$.

הערה 3.4 אפשר לחשוב על ה-k-סגור באופן הבא: נביט ב H, אם הוא מקיים את התנאי, אז הוא סגור וסיימנו. אחרת יש מעגל שלא מוכל בHאבל מכיל לכל היותר k צלעות שאינן בH. נוסיף את המעגל הזה עם קדקדיו וצלעותיו שלא בH ונקבל את H'. נמשיך כך עד שהגרף סגור.

למה 3.5 החיתוך של גרפים k סגורים הוא k סגור. זה יוכיח כי ה-k-סְגור (sgor) הוא k סָגור (sagur)

הוכחה: יהיו H_1, H_2 שני תתי גרפים k-סגורים של G. נביט במעגל C כלשהו שחותך את $H_1 \cap H_2$ אך אינו מוכל בו. מכיוון שC אינו מוכל בחיתוך, הוא אינו מוכל הH_1 או אינו מוכל בH_2. מהסגירות של שניהם נובע כי לCיש לפחות $k+1$ צלעות שאינן בH_1 או אינן בH_2 ולכן הן אינן ב $H_! \cap H_2$. ■

טענה 3.6 נתון $G=(V,E)$ ללא גשרים. תהא $X \subseteq E$ תת קבוצה של צלעות ונחשוב עליה כתת גרף מושרה (כלומר כל הקדקדים שנוגעים בצלעות ייכנסו לגרף). אז אם $\langle X \rangle_k = G$ יש בG $k+1$ זרימה שמתאפסת רק בצלעות X.

הערה 3.7 האינטואיצה שלי לעובדה הזאת היא המקרה של $k=1$. במקרה כזה, אם אנחנו לוקחים עץ פורש אז אפשר למצוא 2-זרימה שלא מתאפסת מלבד אולי בעץ. זאת שיטה שהשתמשו בה עוד לפני שההוכחה של $Seymour$ הופיעה. אני מאמין שכנראה זאת ה"דרך הנכונה" להרחיב מהמקרה של $k=1$ למקרה כללי.

הוכחה: נוכיח זאת באינדוקציה על כמות הצלעות שאינן בX. אם $X=E$ אפשר לקחת את זרימת האפס והיא מקיימת את התנאי. נניח כי הוכחנו את הטענה לכל $X'\subseteq E$ כך ש-$|E\setminus X'|<m$. נוכיח עבור $X\subseteq E$ עבורו $|E\setminus X|=m$.

מכיוון ש$\langle X\rangle_k=G$, כל מעגל שלא מוכל בX מכיל לכל היותר k צלעות שאינן בX. נביט במעגל כנ"ל ונסמנו בC (חייב להיות כזה כי כל צלע נמצאת באיזשהו מעגל - הגרף ללא גשרים - וX הוא לא כל E). ברור כי $G=\langle X\cup C\rangle_k$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש זרימה ב G שאינה מתאפסת מחוץ ל$X\cup C$. אם היא לא מתאפסת בC, סיימנו. אחרת, נניח שהאוריינטציה של צלעות C הן כולן לאותו כיוון (עם\נגד כיוון השעון). אז אם נוסיף 1 לכל הצלעות בC זאת עדיין תהיה זרימה. כיוון שיש לכל היותר k צלעות מחוץ לX, ואנחנו עובדים מודולו $k+1$, אחרי שנעשה זאת מספיק פעמים כל הצלעות בC יהיו שונות מאפס וסיימנו. ■

הערה 3.8 כעת אנו מוכנים להוכחת משפט Seymour. התכנית היא כזאת - נמצא אוסף של מעגלים זרים (בקדקדים ובצלעות) $C_1,...,C_t$ שאיחודם מקיים $\langle C_1\cup...\cup C_t\rangle_2=G$. אזי על המעגלים יש 2-זרימה ללא אפס, ומחוץ למעגלים יש 3-זרימה ללא אפס. סך הכל מצאנו $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ זרימה ללא אפס והוכחנו כי זה אומר שיש 6-זרימה ללא אפס.

משפט 3.9 (Menger) בגרף k-קשיר צלעית בין כל שני קדקדים שונים יש k מסלולים זרים בצלעות. בפרט אם $k=2$ כל שני קדקדים נמצאים על מעגל בגרף.

הוכחה: `https://en.wikipedia.org/wiki/Menger%27s_theorem` ■

הוכחה: (משפט $Seymour$**)**

נביט בגרף 3-קשיר G. יש בו מעגל C_1. אם $G=\langle C_1\rangle_2$ סיימנו. אחרת, נניח וכבר אספנו t מעגלים זרים כך ש$S_t=\langle C_1\cup...\cup C_t\rangle_2$ גרף קשיר (עבור מעגל אחד זה ברור, כרגע נראה כי תמיד ניתן להוסיף מעגל זר כך שהגרף הנ"ל קשיר). S_tהוא תת-גרף מושרה, אחרת יש צלע בין שני קדקדים בS_t שאינה בו, אז יש מעגל עם צלע בודדת שלא נמצאת בS_t (כי הוא קשיר) וזה אומר שהוא לא 2-סגור. בנוסף, כל קדקוד ב$H_t=G\setminus S_t$ מחובר לכל היותר לקדקוד אחד בS_t אחרת הוא היה צריך להיות בS_t מה-2-סגירות שלו. על הגרף המושרה H_tאפשר לחשוב בתור יער של בלוקים, כך שכל בלוק הוא תת גרף 2-קשיר צלעית מקסימלי. נביט על בלוק B בH_t שמהווה "עלה" של היער. הבלוק B חייב להיות מחובר לS_t בשני מקומות (שונים) לפחות, נסמנם בתור u,v (אחרת G לא 3-קשיר צלעית). אבל $u,v\in B$ ולכן יש מעגל בB שמכיל את שניהם (משפט מנגר מלמעלה), נסמנו C_{t+1}. המעגל הזה זר למעגלים המקוריים, וגם $S_{t+1}=\langle\cup_{i=1}^{t+1}C_i\rangle_2$קשיר לפי איך שבחרנו אותו. התהליך חייב להסתיים כי הגדלנו ממש את S_t ומתישהו נקבל $S_t=E$. זה מסיים את ההוכחה לפי ההערה דלעיל והטענה על $2+1$ זרימה מחוץ ל$\cup_{i=1}^{t}C_t$. ■

4 ההשערות של Tutte

1. בכל גרף 2-קשיר צלעית יש 5-זרימה ללא אפס.
2. בכל גרף 2-קשיר צלעית ללא מינור פטרסן יש 4-זרימה ללא אפס (הוכחה של זה תוכיח את משפט ארבעת הצבעים).
3. בכל גרף 4-קשיר צלעית יש 3-זרימה ללא אפס.

ראינו מקודם כי $Seymour$ "כמעט הוכיח" (6-זרימה ולא 5-זרימה) את 1. יש לו (עם שותפים) תוצאה שמגיעה קרוב ל2.
לגבי 3., אנחנו מקבלים את ה"כמעט הוכחה" (4-זרימה ולא 3-זרימה) באמצעות המשפט. אשאיר לכם כתרגיל להוכיח שזה מספיק:

משפט 4.1 (Nash-Williams) בגרף $2k$-קשיר צלעית יש k עצים פורשים זרים.

הערה 4.2 יש הוכחה של 8-זרימה במקרה של 1., ששייכת ל- Jaeger, שמשתמשת במשפט דלעיל. צריך להשתמש בהערה 3.8 ובהכפלת כל הצלעות בגרף.