אינווריאנטים

1. על הלוח רשומים מספרים $1, 2, 3, \dots, 100$. בכל מהלך מוחקים שני מספרים כלשהם באופן אקראי a,b ומחליפים אותם ב-$a+b+ab$. הוכיחו שהמספר שיישאר בסוף לא תלוי בבחירות של המספרים.

2. באי חיות 17 זיקיות אפורות, 15 זיקיות ירוקות ו-13 זיקיות חומות. כאשר שתי זיקיות מצבע שונה נפגשות, שתיהן מחליפות צבע לצבע השלישי (למשל אם זיקית אפורה וזיקית חומה נפגשו שתיהן הופכות להיות ירוקות וכו'). האם יכול לקרות שכעבור כמה זמן כל הזיקיות באי יהיו באותו צבע?

3. נתונים 2017 ישרים במישור, כך שאף שלושה לא עוברים דרך נקודה אחת. טורבו החלזון יושבת על נקודה כלשהי על בדיוק אחד הישרים, ומתחילה להחליק לאורך הישרים באופן הבא: היא נעה לאורך הישר עליו היא נמצאת עד שהיא מגיעה להצטלבות עם ישר אחר. בהצטלבות היא ממשיכה את מסעה לאורך הישר האחר תוך פנייה שמאלה או ימינה, ובכל הצטלבות היא משנה את בחירת כיוון הפנייה. טורבו יכולה לשנות את כיוון תנועתה רק בנקודות ההצטלבות. האם ייתכן שקיים קטע אשר טורבו מחליקה לאורכו בשני הכיוונים האפשריים במהלך מסעה?

4. נתון מחומש קמור במישור. חמשת הישרים המכילים את הצלעות מחלקים את המישור למספר תחומים.

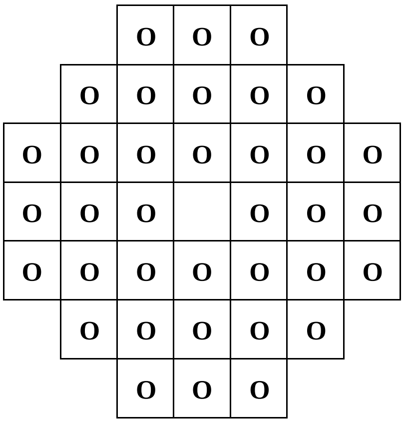
א. הראו כי בתוך כל תחום, הנקודות בהן המשיקים מכל נקודה למחומש נוגעים בו לא תלויות בנקודה ממנה מעבירים משיקים.

נקרא לכיוון הישר בין נקודות ההשקה הכיוון המתאים לתחום.

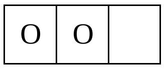
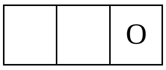
ב. לכל נקודה מחוץ למחומש, נצא ממנה ונלך בכיוון המתאים, נגד כיוון השעון, עד שנגיע לתחום אחר. שם נמשיך בכיוון המתאים לתחום החדש עד אשר נגיע לתחום הבא, וכך הלאה. הראו כי המסלול שמתקבל חוזר חזרה לנקודה ממנה התחלנו.

5. א. כמה מלבנים בגודל 1×4 אפשר לחתוך מריבוע 10×10?

ב. כמה מלבנים בגודל 1×5 אפשר לחתוך מריבוע 8×8?



6. נתון משחק (התמונה בציור). בכל צעד של המשחק חייל (O) יכול לקפוץ מעל חייל אחר למשבצת ריקה במאוזן או במאונך, החייל שמעליו קפצו מורד מהלוח.

לדוגמא  הופך ל- 

מהו המספר המינימלי של חיילים שאפשר להשאיר בסוף המשחק?

7. אותו משחק אבל על לוח אינסופי כאשר המצב ההתחלתי הוא שהחיילים ממלאים ריבוע $N\times N$. מהו מספר החיילים המינימלי שאפשר להשאיר לכל N?

8. נתונות שתי רשימות של מספרים: האחת 1, 6, 11, ..., 96 והשנייה 4, 9, 14, ..., 99. בכל תור מוחקים שני מספרים מאחת הרשימות ורושמים את שליש הסכום שלהם (שאינו בהכרח שלם) ברשימה השנייה. ממשיכים בתהליך כל עוד אפשר.

א. הוכיחו שבסוף התהליך יישאר בדיוק מספר אחד בכל אחת מהרשימות.

ב. הוכיחו ששני המספרים האלה שונים.

9. על המעגל נתונות נקודות כחולות ואדומות. מותר להוסיף נקודה אדומה ולשנות את הצבעים של הנקודות השכנות שלה או להסיר נקודה אדומה ולשנות את הצבעים של הנקודות השכנות שלה בעבר (אסור להשאיר פחות מ-2 נקודות על המעגל). הוכיחו כי אי אפשר להעביר רק ע"י הפעולות האלה מעגל עם שתי נקודות אדומות למעגל עם שתי נקודות כחולות.

בתאבון!