

אי-שוויונים

1. מספרים לא שליליים a, b, c מקיימים $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + ac + bc) \neq 0$.

מצאו את הערך הקטן ביותר האפשרי של $\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{ac}{a^2+c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2+c^2}}$.

2. מספרים חיוביים x_1, x_2, \dots, x_n . הראו כי $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \leq \frac{n}{1 + \sqrt{n}}$.

3. מספרים לא שליליים a, b, c, d מקיימים $a + b + c + d = 3$. הוכיחו כי

$$\frac{a}{2b^3+1} + \frac{b}{2c^3+1} + \frac{c}{2d^3+1} + \frac{d}{2a^3+1} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}.$$

4. מספרים חיוביים x, y, z . הוכיחו כי

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq (x+y+z) \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{y^2+z^2} + \frac{z}{z^2+x^2} \right).$$

5. מספרים x, y, z לא שליליים. הוכיחו כי

$$(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + z^2 + 1)(y^2 + z^2 + 1) \geq (4x-1)(4y-1)(4z-1).$$

6. מספרים לא שליליים a, b, c מקיימים $ab + ac + bc + abc \geq 4$. הוכיחו כי

$$a + b + c \geq 3. \text{ א.}$$

$$a + b + c \geq 3 + \frac{(b-c)^2}{b+c+4}. \text{ ב.}$$

7. מספרים לא שליליים a, b, c מקיימים $\sqrt{a+2b+1} + \sqrt{a+2c+1} = 4$. הוכיחו כי

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq 8. \text{ א.}$$

$$3 + \frac{1}{16}(b-c)^2 \leq a+b+c \leq 4. \text{ ב.}$$

8. מספרים חיוביים x, y, z מקיימים $xyz = 1$. הוכיחו כי

$$\frac{x}{x+y^2+z^4} + \frac{y}{y+z^2+x^4} + \frac{z}{z+x^2+y^4} \leq 1.$$

9. מספרים לא שליליים a, b, c, d מקיימים $a + b + c + d = 4$. הוכיחו כי

$$abcd|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)| \leq 1.$$

10. מספרים x, y, z לא שליליים. הוכיחו כי

$$(x+y)^2(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2 \geq 8(xy+xz+yz)^2(x^2+y^2).$$