

אי-שוויונים לירדן (פסח תשע"ח)

1. מספרים חיוביים a, b, c מקיימים $a + b + c = 3$. הוכיחו כי $\frac{4}{a} + \frac{8}{b^2} + \frac{27}{c^3} \geq 24$.

2. מספרים חיוביים x, y, z מקיימים $x + y + z = 4$ וגם $xy + xz + yz = 5$. מצאו את

$$\text{הערך המינימלי האפשרי של הביטוי } (x^3 + y^3 + z^3) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

3. מספרים חיוביים a, b, c מקיימים $a + b + c = 3$. הוכיחו כי

$$4 \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right) + 9abc \geq 21.$$

4. מספרים חיוביים a, b, c מקיימים $a + b + c = 3$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab} \leq \frac{9}{2(ab+ac+bc)}.$$

5. מספרים אי-שליליים a, b, c מקיימים $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. הוכיחו כי $a + b + c \leq 3$.

6. מספרים אי-שליליים a, b, c מקיימים $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. הוכיחו כי

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

7. מספרים חיוביים a, b, c . הוכיחו כי

$$\sqrt{\frac{bc}{a(a+3b)}} + \sqrt{\frac{ca}{b(b+3c)}} + \sqrt{\frac{ab}{c(c+3a)}} \geq \frac{3}{2}$$

8. לכל משולש חד-זווית, הוכיחו כי $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{1}{S}$

9. לכל משולש הראו כי $\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ac}{a^2 + c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{1}{2} + \frac{2r}{R}$