אי-שוויונים קשים (חורף תשע"ח)

1. עבור $\{x,y,z\}\subset[-1,1]$ המקיימים $x+y+z=0$, הוכיחו כי

$$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{6}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{6}}+\sqrt{1+z+\frac{x^2}{6}}\le 3.$$

2. עבור $\{x,y,z\}\subset[-1,1]$ המקיימים $x+y+z=0$, הוכיחו כי

$$\sqrt{1+x+\frac{7y^2}{9}}+\sqrt{1+y+\frac{7z^2}{9}}+\sqrt{1+z+\frac{7x^2}{9}}\ge 3.$$

3. עבור x,y,z,a,b,c חיוביים, הוכיחו כי $\frac{x^2+a}{yz+b}+\frac{y^2+b}{zx+c}+\frac{z^2+c}{xy+a}\ge 3$.

4. עבור x,y,z,a,b,c חיוביים, הוכיחו כי

$$\frac{b+c}{a(y+z)}+\frac{c+a}{b(z+x)}+\frac{a+b}{c(x+y)}\ge\frac{3(a+b+c)}{ax+by+cz}.$$

5. עבור a,b,c,d,e חיוביים, הוכיחו כי

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+e}+\frac{d-e}{e+a}+\frac{e-a}{a+b}\ge 0.$$

6. מספרים חיוביים a,b מקיימים $a+b=1$. הראו כי $a^{4b^2}+b^{4a^2}\le 1$.

7. מספרים חיוביים a,b,c,d מקיימים $a^4+b^4+c^4+d^4=4$. הראו כי

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\ge 4.$$

8. מספרים ממשיים $x_1,x_2,\dots,x_n$ מקיימים $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1$. הראו כי

$$\sqrt{1-x_1x_2}+\sqrt{1-x_2x_3}+\dots+\sqrt{1-x_nx_1}\ge\sqrt{n(n-1)}.$$

9. מספרים חיוביים a,b,c,d מקיימים $a+b+c+d=4$. הראו כי

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+cd}+\frac{c}{c+da}+\frac{d}{d+ab}\ge 2.$$

10. לכל משולש הראו כי $\frac{l_a}{r_a}+\frac{l_b}{r_b}+\frac{l_c}{r_c}\ge 3$.