

## אינדוקציה

**שאלה 1.**  $N$  קלפים מסודרים בשורה, כשפני חלק מהם מעלה וחלק מטה. מהלך חוקי הוא להפוך קלף שפניו מטה כך שפניו יהיו כלפי מעלה, וגם להפוך כל כמות שהיא של קלפים מימינו (ניתן גם לא להפוך כלל). האם תהליך זה יוכל להמשך עד אינסוף?

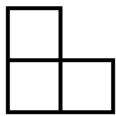
**שאלה 2.** כמה פעמים המספר  $111\dots 111$ , המורכב מ- $3^n$  ספרות, מתחלק ב-3?

**שאלה 3.** נתון כי עבור  $x$  ממשי כלשהו  $x + \frac{1}{x}$  שלם. הוכיחו כי לכל  $n$  טבעי המספר  $x^n + \frac{1}{x^n}$  גם הוא שלם.

**שאלה 4.** בטורניר השתתפו מספר שחקני טניס, וכל שניים שיחקו משחק אחד בדיוק, בו אחד השחקנים ניצח. הוכיחו כי ניתן לסדר את השחקנים בשורה כך שכל אחד חוץ מהימני ביותר ניצח את השחקן שעומד לימינו.

**שאלה 5.** נתון מצולע משוכלל בעל  $N$  קודקודים. קבוצת אלכסונים נקראת מגניבה, אם כל שני אלכסונים חותכים זה את זה (או יוצאים מקודקוד משותף). מהו הגודל המקסימלי של קבוצת אלכסונים מגניבה?

הערה: כאן צלע נחשבת לאלכסון.



**שאלה 6.** הוכיחו כי ניתן לרצף צורה פינתית (שדומה לצורה בציור) עם אורך צלע  $N$  בעזרת צורות פינתיות עם אורך צלע 1.

**שאלה 7.** 200 אבירים רוכבים על אופניים במסלול מעגלי. על פי חוקי הבטיחות של המסלול, מותר להם לעקוף זה את זה רק בנקודה אחת על המסלול. האם האבירים יכולים לנסוע כולם במהירויות קבועות ושונות?

**שאלה 8.** במעגל מסודרים  $N$  סימני "-" ו- $2N$  סימני "+". הוכיחו כי קיימת נקודה  $P$  על המעגל (לא על אף אחד מהסימנים) כך שאם מסתכלים על קשת במעגל שאחד מקודקודיה הוא  $P$ , אז בקשת זו יש לפחות אותה כמות של סימני + כמו של סימני -.

**שאלה 9.** תמורה של המספרים  $1, \dots, n$  היא רישום של המספרים בשורה בסדר כלשהו. לדוגמה, 15234 היא תמורה של  $1, \dots, 5$ . נאמר שתמורה **מפרידה** את הקבוצה  $A \subset \{1, \dots, n\}$  אם הקבוצה  $A$  לא מופיעה ברצף ברישום התמורה. לדוגמה, התמורה שניתנה קודם מפרידה את  $\{1, 2, 4\}$  אך לא את  $\{2, 3, 5\}$ . הוכח שבהנתן  $n - 2$  תתי קבוצות של  $\{1, \dots, n\}$ , ישנה תמורה שמפרידה את כולן.

**שאלה 10.** חרגול נקודתי רוצה לקפוץ מהנקודה 0 על הציר הממשי לנקודה  $X$ . לשם כך, מותר לו לעשות  $n+1$  קפיצות באורכים  $a_1, \dots, a_{n+1}$  (כולם שלמים חיוביים שונים), ולהשתמש בכל אורך פעם אחת. נתון גם כי  $a_1 + \dots + a_{n+1} = x$ . על הציר הממשי אורבות לחרגול  $n$  צפרדעים נקודתיות, שיאכלו אותו אם ינסה לנחות עליהן. הוכח שהחרגול בהכרח מסוגל להצליח במילוי רצונו.

**בתאבון!**