איך פותרים משוואות פונקציונליות?

משוואה פונקציונלית היא שאלה בה נתונה זהות על פונקציה כלשהי, בדרך כלל עם שני פרמטרים מהתחום של הפונקציה (לדוגמה $f\left(xf(x)+f(y)\right)=f(x)^2+y$) וצריך למצוא את כל הפונקציות שמקיימות את הזהות (נגיד $f(x)=x$ ו-$f(x)=-x$ מקיימים את הזהות הזאת. האם יש עוד?).

חשוב להגיד שבמבחן חייבים לכתוב וידוא שהפתרונות עובדים, למרות שזה ממש קל, אחרת מורידים נקודות.

הנה כמה טיפים על מה לחשוב כשפותרים.

0. דבר ראשון לחפש פתרונות, רוב הזמן יהיו פתרונות פשוטים שקל לחשוב עליהם רק מלהסתכל על הזהות. זה ממש עוזר להבין מה אנחנו עושים (אם ראינו שיש פתרון לא חח"ע, אין מה לנסות להוכיח חח"ע) ולתפוס טעויות. אבל לפעמים אין למשוואה פתרונות, או שיש רק פתרונות מסובכים שקשה לחשוב עליהם.
אפשר גם לשים לב לסימטריות במרחב הפתרונות, נגיד שאם $f(x)$ פתרון אז $f(x)+c$ פתרון.

1. הצבות. נציב במשתנים הצבות שמפשטות את הביטוי. לדוגמה 0,1 או $x=y$.
לפעמים יש הצבות מעניינות שמשוות ביטויים משני צדדי המשוואה. נגיד במשוואה
$$f(x+y)+\cdots=-yf(xy)+\cdots$$
כדאי לנסות את ההצבה $x=\frac{1}{2}, y=-1$.

2. פישוטים. לפעמים המשוואה על $f(x)$ שקולה למשוואה יותר פשוטה על $g(x)=-f(x-1)$ או $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ או משהו כזה, ויותר נוח לעבור למשוואה הפשוטה.
בשביל זה עוזר להכיר פתרונות (נגיד אם $f(x)=x-2$ פתרון, יכול להיות שהמשוואה תצא יותר פשוטה בשביל $g(x)=f(x+2)$ או $g(x)=f(x)+2$).

3. להוכיח שהפונקציה חח"ע או על.
כדי להוכיח שהפונקציה חח"ע נניח ש-$f(a)=f(b)$ וננסה הצבות כדי להוכיח ש- $a=b$. אם הצלחנו להוכיח חח"ע, ננסה להביא את המשוואה לצורה $f(\dots)=f(\dots)$ כדי להשתמש בזה.
לפעמים יוצא שמוכיחים חח"ע רק בנקודות מסויימות (נגיד שאם $f(a)=f(b)=0$ אז $a=b$).
כדי להוכיח שהפונקציה על, נגיע למשוואה מהצורה $f(\dots)=\cdots$ ונראה שעל ידי שליטה במשתנים אנחנו יכולים לגרום לצד ימין להחזיק כל ערך בטווח. אם הצלחנו להוכיח על, לסל הכלים שלנו נוספו הצבות מהצורה $f(x)=a$.
דוגמה: אם נתון $f\left(f(x)^2+f(x)\right)=\frac{1}{x}$ עבור $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ אז הפונקציה חח"ע ועל (ואין לי מושג מה היא).

4. להוכיח עוד תכונות על הפונקציה: זוגיות/אי-זוגיות, מונוטוניות, מחזוריות.

5. סימטריה. לפעמים צד אחד של המשוואה סימטרי בx,y ואז נובעת משוואה על הצד השני.

6. כל מיני קבוצות שלפעמים שווה לנתח ולהציב ערכים מתוכן:
   א. שורשים של הפונקציה. לפעמים שווה לנתח את הקבוצה שלהם, נגיד כדי להוכיח שהיא בגודל 0 או 1.
   ב. מחזורים של הפונקציה. לפעמים נתקלים באחד ואז שווה להבין עליהם דברים. אם c מחזור, אז $x=x+c$ אחלה הצבה. אותו דבר למחזורים כפליים.
   ג. נקודות שבהן f שווה למה שאנחנו מצפים. אפשר לנסות להגדיל את הקבוצה הזאת עד שהיא הכול.

7. משוואת קושי. זאת המשוואה $f(x+y)=f(x)+f(y)$ וממש כיף כשמצליחים לקבל אותה (או את האנלוג הכפלי שלה). אם התחום של הפונקציה הוא $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ אז היא לבדה גוררת שהפונקציה היא $f(x)=cx$ (תרגיל). אבל אם התחום הוא $\mathbb{R}$ יכולים להיות לה פתרונות מזעזעים (למי שיודע טיפה לינארית - כי אפשר לקבוע את הערכים של f ארביטררית על בסיס של $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{Q}$, ולהרחיב לינארית).
למרבה המזל, קורה הרבה שמשיגים את משוואת קושי יחד עם עוד מידע על f ואז יש רק פתרונות יפים. תרגיל: מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמקיימות
$$f(x+y)=f(x)+f(y), f(xy)=f(x)f(y)$$

דוגמה לפתרון של משוואה פונקציונלית:

מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f\left(xf(x)+f(y)\right)=f(x)^2+y$.

פתרון:
קודם ננחש פתרונות. נסתכל על פונקציות לינאריות ונשים לב שהפתרונות $f(x)=x$ ו-$f(x)=-x$ עובדים.

עכשיו נציב $x=0$ ונקבל $f\left(f(y)\right)=f(0)^2+y$. מכאן נובע ש-$f$ חח"ע ועל (למה? כי אם $f(y)=f(y')$ אז $f(0)^2+y=f\left(f(y)\right)=f\left(f(y')\right)=f(0)^2+y'$; וכי על ידי שליטה ב-$y$ אפשר להביא את צד ימין להיות כל מספר). בפועל נשתמש רק בזה שהיא על.

בגלל שהיא על, נוכל לבצע את ההצבה $f(x)=0$ שמוחקת שני דברים. זה גורר $f\left(f(y)\right)=y$ (יחד עם הביטוי הקודם שקיבלנו בשביל $f\left(f(y)\right)$, נובע ש-$f(0)=0$).

עכשיו נעשה את ההצבה $f(x)\leftarrow x$. בגלל שמתקיים $f\left(f(x)\right)=x$, הביטוי $xf(x)$ מצד שמאל **נשמר**, ולכן צד שמאל שומר על אותו ערך. בצד ימין, לעומת זאת, $f(x)^2$ מתחלף ב-x^2, ונובע ש-$f(x)^2=x^2$.

זה נשמע כמו הסוף, קיבלנו ש-$f(x)=\pm x$. אבל צריך לשים לב שהוכחנו את זה עבור כל x בנפרד, ואנחנו צריכים להראות שהסימן הוא אחיד בין xים שונים. נניח בשלילה שקיימים x,y שונים מ-0 ככה ש-$f(x)=x$ אבל $f(y)=-y$. נציב אותם במשוואה ונקבל $f(x^2-y)=x^2+y$. נובע שהמספרים x^2+y ו- x^2-y חייבים להיות שווים או נגדיים אבל זה לא ייתכן.

לבסוף קיבלנו רק את הפתרונות $f(x)=x$ ו-$f(x)=-x$ שניחשנו בהתחלה.

במבחן צריך לרשום במפורש משהו כמו $x^2+y=x^2+y$ לפתרון הראשון ו-$-(-x^2-y)=(-x)^2+y$ לשני כדי להראות שבדקנו.