

# הומוטתיה

## דוגמאות

1. נתון טרפז  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ . המשכי הצלעות  $AD, BC$  נחתכים ב- $E$  ואלכסוני הטרפז נחתכים ב- $F$ . הוכיחו כי הישר  $EF$  חוצה את בסיסי הטרפז.
2. ישר אוילר: הוכיחו כי מפגש הגבהים, מפגש התיכונים ומרכז המעגל החוסם במשולש נמצאים על ישר אחד.
3. מעגל 9 הנקודות:  $AD, BE, CF$  הם גבהים במשולש שנפגשים בנקודה  $H$ . הוכיחו כי  $D, E, F$ , אמצעי הצלעות של המשולש ואמצעי הקטעים  $AH, BH, CH$  נמצאים על מעגל אחד.
4. הלמה של ארכימדס: נתון מעגל  $\Omega$  ומיתר  $AB$  במעגל. יהי מעגל  $\Gamma$  שמשקי מבפנים ל- $\Omega$  בנקודה  $P$  ולמיתר  $AB$  בנקודה  $Q$ . הראו כי  $PQ$  חוצה את  $\angle APB$ .

## שאלות

5. המעגל החסום במשולש  $ABC$  משיק לצלעות בנקודות  $D, E, F$ . חוצי הזוויות של המשולש נחתכים עם המעגל החוסם בנקודות  $M_A, M_B, M_C$ . נסמן ב- $I$  את מרכז המעגל החסום וב- $O$  את מרכז המעגל החוסם של  $ABC$ . הראו כי הישרים  $DM_A, EM_B, FM_C, OI$  נפגשים בנקודה.
6. על הגובה מ- $A$  של משולש  $ABC$  נבחרה נקודה  $P$ . יהיו  $M, N$  אמצעי הצלעות  $AB, AC$  בהתאמה. הראו כי האנך מ- $M$  ל- $BP$  והאנך מ- $N$  ל- $CP$  נפגשים על האנך האמצעי של  $BC$ .
7. תהי  $D$  עקב האנך מ- $A$  ל- $BC$  ו- $M$  מפגש התיכונים במשולש. נסמן ב- $P$  את החיתוך של הקרן  $MD$  עם המעגל החוסם של  $ABC$ . הראו כי  $AB$  משיק למעגל  $BDP$ .
8. מרכז המעגל החסום במשולש  $ABC$  יסומן ב- $I$ . המעגל החסום מחוץ ל- $A$  במשולש משיק צלע  $BC$  בנקודה  $E$ . נסמן ב- $M$  את אמצע הצלע  $BC$ . הוכיחו כי  $MI \parallel AE$ .

9. המעגל החסום במשולש  $ABC$  משיק לצלע  $BC$  בנקודה  $D$ , מרכז המעגל יסומן  $I$ . המעגל החסום מחוץ לקודקוד  $A$  במשולש משיק לצלע  $BC$  בנקודה  $E$ , מרכז המעגל יסומן  $I_A$ . הראו כי  $DI_A, EI$  נחתכים על הגובה מ- $A$  ל- $BC$ .

10. יהי  $I$  מרכז המעגל החסום,  $M$  מפגש התיכונים,  $N$  נקודת נאגל במשולש  $ABC$ . הראו כי  $M, I, N$  נמצאות על ישר אחד. הערה: נקודת נאגל היא נקודת המפגש של הישרים שמחברים את קודקודי המשולש לנקודות ההשקה של המעגלים החסומים מבחוץ.

11. נתון מעגל  $\omega$ , נקודה על המעגל ונקודה  $P$  בתוכו. הראו כי לכל מיתר  $BC$  של  $\omega$  שעובר ב- $P$ , מעגל  $\omega$  הנקודות של  $ABC$  משיק למעגל קבוע שלא תלוי בבחירה של המיתר  $BC$ .

12. המעגל החסום במשולש  $ABC$  משיק לצלעות בנקודות  $D, E, F$ . יהיו  $I_A, I_B, I_C$  מרכזי המעגלים החסומים מחוץ למשולש. נסמן ב- $M$  את נקודת מפגש התיכונים וב- $G$  את נקודת ז'רגון של המשולש (החיתוך של  $AD, BE, CF$ ). הראו כי הישרים  $DI_A, EI_B, FI_C, MG$  נפגשים בנקודה.

13. נסמן ב- $\omega, \omega_A$  את המעגל החסום והחסום מחוץ ל- $A$  במשולש  $ABC$ . תהי  $M$  אמצע  $BC$ . החיתוך של  $\omega$  עם  $AM$  שקרוב יותר ל- $A$  יסומן ב- $P$ , החיתוך של  $\omega_A$  עם  $AM$  שרחוק יותר מ- $A$  יסומן ב- $Q$ . המשיק ל- $\omega$  ב- $P$  נחתך עם  $BC$  ב- $X$ . המשיק ל- $\omega_A$  ב- $Q$  נחתך עם  $BC$  ב- $Y$ . הראו כי  $MX = MY$ .

\*14. נתון מרובע  $ABCD$  ומעגל  $\Omega$  שמשקף לצלעות  $AD, CD$  ולהמשכי הצלעות  $AB, BC$ . הראו כי המשיקים החיצוניים המשותפים של המעגלים החסומים במשולשים  $ABC, ADC$ , נפגשים על  $\Omega$ .