

## גרפים

0. יש קבוצה של אנשים במועדון, חלקם מכירים זה את זה. המועדון יקרא  $k$  חברי אם ניתן להשיב כל קבוצה של  $k$  חברי מועדון מסביב לשולחן עגול, כך שכל אחד יושב ליד שני אנשים שהוא מכיר.
- א. האם כל מועדון 6 חברי הוא בהכרח 7 חברי?  
ב. האם כל מועדון 7 חברי הוא בהכרח 8 חברי?  
ג. האם כל מועדון 8 חברי הוא בהכרח 9 חברי?  
ד. האם כל מועדון 9 חברי הוא בהכרח 10 חברי?
1. במסיבה יש כמות זוגית של אנשים. כל אחד מכיר כמות זוגית של אנשים במסיבה. הראו כי קיימים לפחות שני אנשים שכמות המכרים המשותפים שלהם זוגית.
2. במדינה רחוקה ומתוקנת שבה יש תחבורה ציבורית מפותחת, בין כל שתי ערים יש קו רכבת או קו אוטובוס. הוכח כי ניתן לחלק את הערים לשני מחוזות, כך שניתן לטייל במחוז הראשון רק באמצעות הרכבת ולעבור בכל עיר בדיוק פעם אחת, וכן ניתן לטייל במחוז השני באותו אופן באמצעות אוטובוסים.
3. רוצים לצייר במישור גרף מלא עם  $n$  קודקודים, כך שכל קשת נחתכת פעם אחת לכל היותר. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של  $n$ ?
4. חתכו מתוך קובייה  $4 \times 4 \times 4$  מספר קוביות של  $1 \times 1 \times 1$ , כך שהצורה שהתקבלה עדיין מחוברת (כלומר ניתן להגיע מכל קובייה קטנה שנשארה לכל אחת אחרת תוך מעבר רק בין פאות של קוביות קטנות שנשארו). כמו כן, אם מסתכלים מכל אחד משלושת הפאות על הקובייה, לא ניתן לראות את הצד השני שלה. כמה קוביות לכל היותר הסרנו?
5. תת-גרף של גרף שלם עם  $n$  קודקודים נקרא משולשי אם אפשר להתאים מספר לכל משולש בגרף השלם כך שאם נחשב עבור כל קשת את סכום המספרים של המשולשים בהן היא מופיעה נקבל 1 עבור קשת של גרף ו-0 עבור כל קשת אשר אינה שייכת לגרף. מצאו את כל הגרפים המשולשיים (כתלות ב- $n$ ).
6. נתון גרף על 2019 קודקודים. נקרא לשתי קשתות אשר חולקות קודקוד משותף קרניים. מצאו את המספר הקטן ביותר  $n$  כך שאם בגרף יש יותר מ- $n$  קשתות אז בהכרח ניתן למצוא 908 קרניים זרות בקשתות.
7. יש גרף עם 5779 קשתות ורוצים שהסכום  $\sum_{e=vw} \min(d(v), d(w))$  על פני כל הקשתות יהיה מקסימלי. מה הכי טוב שאפשר?

בתאבון!