תרגיל גיאומטרי

1. המרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O, והאלכסונים נפגשים ב-E. בתוך המרובע נבחרה נקודה P כך ש- $\sphericalangle PAB+\sphericalangle PCB=\sphericalangle PBC+\sphericalangle PDC=90^\circ$. הוכיחו כי הנקודות O, P ו-E על ישר אחד.

2. במרובע ABCD חסום מעגל ω, שמשיק לצלעותיו AB, BC, CD, DA בנקודות E, F, G, H בהתאמה. נקודה X על AC נמצאת בתוך ω. הקטעים XB ו-XD חותכים את ω בנקודות K ו-L. הוכיחו כי FL, GK ו-AC נפגשים בנקודה אחת.

3. בתוך משולש ABC מעבירים אנך אמצעי לצלע AB, שחותך את הישרים AC ו-BC בנקודות C_A ו- C_B. מרכז המעגל החוסם של C_AC_BC יסומן O_C. באופן דומה מוגדרות O_B ו- O_A. הוכיחו כי המעגל החוסם של ABC משיק למעגל החוסם של $O_AO_BO_C$.

4. נתון משולש ABC. נסמן את אמצע BC ב-M. הישר AM חותך את המעגל החסום של ABC בנקודות K ו-L. דרך נקודות K ו-L מעבירים ישרים שמקבילים ל-BC, שחותכים את המעגל החסום פעם נוספת בנקודות X ו-Y בהתאמה. הישרים AX ו-AY חותכים את BC בנקודות P ו-Q. הוכיחו כי $BP=CQ$.

5. במשולש חד-זוויות שונה-צלעות ABC, הגבהים הם AA_1, BB_1, CC_1, ונקודות ההשקה של המעגלים החסומים מבחוץ עם הצלעות המתאימות הן A_2, B_2, C_2. הישר B_1C_1 משיק למעגל החסום ב-ABC. הוכיחו כי $A_1A_2B_2C_2$ חסום במעגל.

6*. נתונים שני מעגלים Θ_1 ו- Θ_2 עם מרכז משותף. שני מעגלים נוספים Ω_1 ו- Ω_2 משיקים ל- Θ_1 באופן חיצוני ול- Θ_2 באופן פנימי. שני מעגלים ω_1 ו- ω_2 משיקים באופן פנימי ל- Θ_1 ו- Θ_2. הוכיחו ש-8 נקודות החיתוך של Ω_1 ו- Ω_2 עם המעגלים ω_1 ו- ω_2 נמצאים כולם על שני מעגלים (מוכללים) השונים מכל המעגלים שהוגדרו.

בתאבון!