אלgוריתם אוcליdס

1. הוכיחו שהשברים $\frac{14n+3}{21n+4}$, $\frac{12n+1}{30n+2}$, $\frac{3n^2+2n+2}{7n^2+5n+5}$ מצומצמים לכל n טבעי.

2. תהי $S \subseteq \mathbb{Z}$ קבוצה לא ריקה של שלמים שסגורה לחיסור (כלומר, אם $x, y \in S$ אז $x - y \in S$).
הוכיחו שקיים n כך ש- $S = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. יהיו n, a, b שלמים חיוביים כך ש-$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a + b\sqrt{2}$. הוכיחו ש-$a$ ו-b זרים.

4. יהיו a, b שלמים חיוביים זרים ויהי p ראשוני אי-זוגי. הוכיחו ש-$\gcd\left(a+b, \frac{a^p+b^p}{a+b}\right)$ שווה 1 או p.

5. מצאו את כל השלמים החיוביים n כך ש- $3^n + 5^n$ מתחלק ב-$3^{n-1} + 5^{n-1}$.

6. יהיו $n \geq m$ שלמים חיוביים. הוכיחו ש-$\binom{n}{m} \frac{\gcd(n,m)}{n}$ הוא מספר שלם.

7. הסדרה a_n מוגדרת באופן הבא: $a_1 = 1, a_{2n} = a_n + 1, a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$. הוכיחו כי כל מספר רציונלי חיובי מופיע בסדרה זו בדיוק פעם אחת.

8. הוכיחו שאם a, b שלמים זרים ו-n, m שלמים חיוביים, אז:

$$\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\gcd(n,m)} - b^{\gcd(n,m)}$$

9. יהיו m, n שלמים חיוביים זרים. למה יכול להיות שווה $\gcd(5^n + 7^n, 5^m + 7^m)$?

10. יהיו a, m, n שלמים חיוביים כך ש-$n \neq m$. למה יכול להיות שווה $\gcd\left(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1\right)$?

11. תהי f_n סדרת פיבונצ'י: $f_1 = f_2 = 1$ ו-$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

א. הוכיחו שכל שני איברים עוקבים בסדרה זרים זה לזה.

ב. הוכיחו שלכל m, n מתקיים $f_{n+m} = f_{n+1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m-1}$.

ג. חשבו את $\gcd(f_{f_{f_{2015}}}, f_{f_{f_{2020}}})$.

12*. יהי p ראשוני אי-זוגי, ותהי $f: \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \to \{0,1\}$ פונקציה המקיימת:

- $f(1,1) = 0$
- $f(a,b) + f(b,a) = 1$ לכל $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ זרים זה לזה, שלא שניהם שווים 1.
- $f(a+b, b) = f(a,b)$ לכל $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ זרים זה לזה.

הוכיחו כי $f(1^2, p) + f(2^2, p) + \cdots + f((p-1)^2, p) \geq \frac{p-1}{16}$.

בתיאבון!