תרגיל אליפסות

1. לאליפסה והיפרבולה באותו מישור יש את אותם המוקדים. הוכיחו כי הם מאונכים.

2. משפט אפולוניוס: במשפחה של מיתרים מקבילים בשניונית האמצעים נמצאים על קו אחד.

3. לשתי פרבולות הצירים מאונכים. הפרבולות נחתכות ב-4 נקודות: A, B, C, D.
א. הוכיחו כי הנקודות שייכות למעגל אחד.
ב. הוכיחו שמרכז מסה של 4 הנקודות נמצא בנקודת חיתוך של שני הצירים.

4. נתונה שניונית עם מוקד. מעבירים דרך F ישר, שחותך את השניונית בשתי נקודות A,B, כך שהקטע AB מכיל את F. הוכיחו כי הגודל $\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}$ אינו תלוי בשיפוע. (מה אם F על ההמשך של AB?)

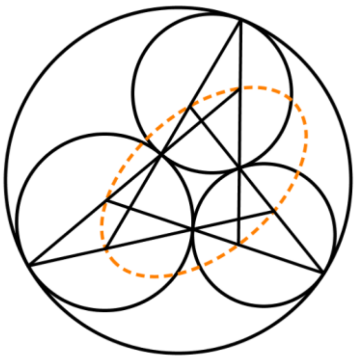
5. לשתי אליפסות שונות יש מוקד אחד משותף. הוכיחו שיש להם לכל היותר שתי נקודות חיתוך.

6. (משפט סלמון) כדור ביליארד נקודתי נע ללא איבוד אנרגיה על פני שולחן ביליארד אליפטי. הוכיחו שכל הקטעים במסלול שלו מקיימים את אחד מבין 3 תנאים (אותו תנאי מתקיים לכל הקטעים):
א. כולם משיקים לאליפסה בעלת אותם מוקדים;
ב. כולם עוברים דרך אחד המוקדים (באופן מתחלף);
ג. בעצם מה המקרה השלישי?

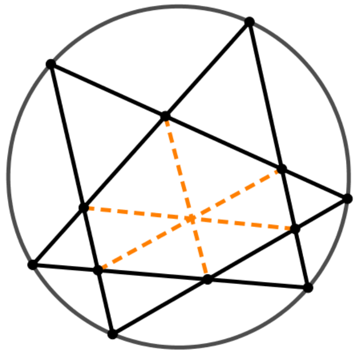
7. על היפרבולה ישרה $xy=1$ נמצאות נקודות K, M סימטריות ביחס לראשית. מעגל שעובר דרך K ומרכזו M חותך את ההיפרבולה בנקודות K, A, B, C. הוכח כי המשולש ABC שווה צלעות.

8. נתונה אליפסה (או שניונית כללית) ועליה נקודות A, B. לכל נקודה X על אותה אליפסה נסמן ב- α,β את מרחקים מנקודה X למשיקים של האליפסה בנקודות A, B, ונסמן ב- γ את המרחק מ-X לישר AB. הוכיחו כי $\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ לא תלוי ב-X. מהו $\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ במקרה של מעגל?

9. לאליפסה נתונה מעבירים שני משיקים מקבילים (בכיוון כלשהו). מעגל משיק לאליפסה ולשני ישרים. מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים מסוג זה.

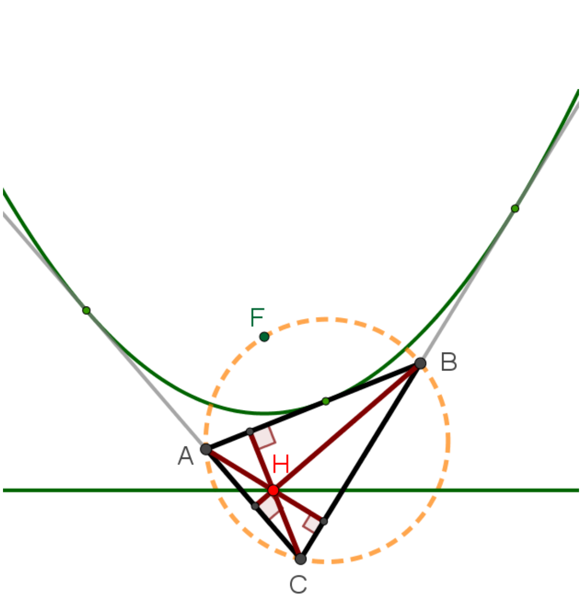


.11



.10

12. צלעות המשולש משיקות לפרבולה. הראו כי המעגל החוסם עובר במוקד ומפגש הגבהים נמצא על המדריך.



בתאבון!

הגדרות שונות ותכונות מפרסמות

0. שניוניות: הקווים שמוגדרים על ידי משוואה ממעלה שנייה

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

ניתן להביא את המשוואה לצורה נוחה באמצעות סיבובים והזזות (חוץ ממקרים מנוונים)

אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ פרבולה $y=k\cdot x^2$ היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

מה המשמעות הגיאומטרית של a ו-b?

1. מוקד ומדריך: קיימת נקודה F שנקראת מוקד, וקיים ישר ℓ שנקרא מדריך, ומספר ε שנקראה **אקסצנטריות**, כך שאליפסה ($0<\varepsilon<1$), פרבולה ($\varepsilon=1$), וגם היפרבולה ($1<\varepsilon$), מתוארות כמקום גיאומטרי של נקודות X עבורן יחס המרחקים למוקד ולמדריך הוא קבוע $\mathrm{FX}=\varepsilon\cdot\ell\mathrm{X}$.

2. שני מוקדים:

אליפסה היא המקום הגיאומטרי של נקודות כך שסכום המרחקים לשני המוקדים קבוע.

היפרבולה היא המקום הגיאומטרי של נקודות כך שערך מוחלט של הפרש המרחקים לשני המוקדים קבוע.

ניתן לחשוב על פרבולה בתור אליפסה או היפרבולה כשאחד המוקדים ברח לאינסוף.

תכונה אופטית: לכל נקודה X על אליפסה\פרבולה\היפרבולה, העקום עצמו הוא חוצה את הזווית בין שני קווים שמחברים את X למוקדים.

3. קוניקות: החתכים של חרוט מעגלי ישר על ידי מישור.
המוקדים מתקבלים בנקודות ההשקה של **כדורי דנדלין** עם המישורים. כדור דנדלין משיקים למישור בנקודה, ולכדור במעגל. איך רואים את המדריך באמצעות הכדור?

בעצם גם כל חתך של כל חרוט שנוצר משניונית, הוא שניונית. אפילו יותר כללי, חתך מישורי של משטח ממעלה שנייה הוא עקום ממעלה שנייה; בפרט הטלה מרכזית מעבירה שניוניות לשניוניות.

4. שניוניות מקיימים מספר ***משפטים פרוייקטיביים***, שבעצם ניתן לנסח אותם עם מעגלים אבל כאשר מנסחים אותם עם שניוניות, ניתן גם לנסח משפטים הפוכים:

משפט פסקל. למשושה שחסום בשניונית, שלושת נקודות החיתוך של ישרי הצלעות הנגדיות הם על ישר אחד. גם ההפך נכון: עם 3 הנקודות שמוגדרות מהמשושה על ישר אחד, אז קודקודיו על שניונית.

משפט בריאנשון. למשושה שחוסם שניונית, אלכסונים נפגשים בנקודה. ולהפך, אם אלכסוניו נפגשים בנקודה, המשושה חוסם שניונית (ישרי הצלעות כולם משיקים לאותה שניונית).

משפט פונסלה למשולשים (יש גם יותר כללי). מגן דוד חוסם שניונית אם ורק אם הוא חסום בשניונית.

דואליות. ניתן להחליף בין נקודות לישרים, כך שיחסי הכלה ישמרו, ונקודות של שניונית נתונה יהפכו למשיקים באותן נקודות ולהפך. השניוניות האחרות גם הופכות לשניונית בדואליות (עם החלפת תפקידים בין נקודות לישרים משיקים).