

ספירה כפולה

1. בחיפה יש m בתים, בהם גרים $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ תושבים. מספר הבתים בחיפה עם k תושבים לפחות הוא d_k . מה יותר גדול: $c_1 + c_2 + \dots + c_m$ או $d_1 + d_2 + d_3 + \dots$?

2. על השולחן מונחים שני דפים וערימת מטבעות כסף. בכל צעד מבצעים את אחת משתי הפעולות הבאות:
- מוסיפים לערימה מטבע זהב אחד וכותבים את מספר מטבעות הכסף בדף הראשון
- מסירים מהערימה מטבע כסף אחד וכותבים את מספר מטבעות הזהב בדף השני.
בסופו של דבר על השולחן נותרו רק מטבעות זהב. הוכיחו כי ברגע זה סכום כל המספרים בדף הראשון שווה לסכום כל המספרים בדף השני.

3. בבית ספר כל תלמידה מכירה 29 תלמידים, וכל תלמיד מכיר 32 תלמידות. האם יתכן שבבית ספר יש בדיוק 5780 תלמידים ותלמידות?

4. בממשלה של מדינה זרה 12 שרים. לכל שר יש 5 חברים ו-6 אויבים בממשלה. כל 3 שרים מרכיבים ועדה. ועדה נקראת מתוקנת אם כל חבריה חברים או שכל חבריה אויבים. כמה ועדות מתוקנות יש?

5. בכל קודקוד של קובייה רשום 1 או -1. במרכז כל פאה רושמים את מכפלת הקודקודים של אותה הפאה. האם יתכן שסכום של 14 מספרים אלה הוא 0?

6. נסמן ב- $p_n(k)$ את כמות התמורות של $\{1, 2, \dots, n\}$ עם בדיוק k נקודות שבת. הוכיחו כי לכל n טבעי

$$\sum_{k=0}^n k^2 p_n(k) = 2 \cdot n! \quad \text{ב.} \quad \sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n! \quad \text{א.} \quad \text{מתקיים}$$

$$7. \text{ חשבו את: } \sum_{k \leq 1000} \left[\sqrt[3]{k^2} \right] + \sum_{k \leq 100} \left[\sqrt{k^3} \right]$$

8. בפאון קמור יש n_k פאות עם k צלעות. הראו כי $3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12$.

9. במישור סומנו n נקודות, אף 3 לא על ישר אחד. נתון כי לכל נקודה קיימת קבוצה של k נקודות שנמצאות במרחקים שווים ממנה. הוכיחו כי $k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2}$.

10. נתון לוח רב-רסי מלבני בגודל $m \times n$. בהתחלה בכל אחת ממשבצות הלוח מונח דיסק רב-רסי (לבן מצד אחד, שחור מצד שני). כל הדיסקים שעל הלוח מונחים עם הצד הלבן כלפי מעלה, חוץ מדיסק אחד שנמצא באחת הפינות של הלוח. מותר לבצע פעולה הבאה: בוחרים דיסק שחור, מורידים אותו מהלוח, והופכים את כל הדיסקים שבמשבצות הסמוכות (לפי צלע). לאילו n, m ניתן להוריד את כל הדיסקים מהלוח באמצעות פעולות כאלה.

11. על השולחן מונחים 2005 כרטיסים. איילה רשמה על כל כרטיס מספר, כאשר כל המספרים שונים, אבל הניחה את הכרטיסים עם המספר כלפי מטה. ברווז יכול בכל שלב להצביע על 3 כרטיסים כלשהם ולשאול את איילה: "מה המספרים על הכרטיסים האלה?" והיא עונה לו אילו מספרים רשומים על הכרטיסים, אבל לא באיזה סדר. כמה שאלות הוא צריך לשאול על מנת לגלות איזה מספר כתוב על כל כרטיס?

12. ספרים מסודרים ב- K מדפים. סידרו אותם מחדש ב- $K+1$ מדפים. הוכיחו שיש ספר עבורו במדף החדש יש פחות ספרים מאשר במדף הקודם. תרגיל המשך: הוכיחו שיש 2 ספרים כאלו.