ספירה כפולה

1. הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{n} k\left(n-k\right)=\sum_{k=0}^{n} \frac{k\left(k-1\right)}{2}$.

2. (אורנג') במדינה מסוימת יש 5 ערים גדולות ו-19 ערים קטנות (עיר גדולה זו עיר שיש בה מעל מיליון תושבים). המדינה מחולקת ל-9 אזורים. מכל עיר גדולה יש קווי אוטובוס ישירים ל-14 ערים אחרות לפחות. מכל עיר קטנה יש קווי אוטובוס ישירים ל-3 ערים אחרות לכל היותר. כל קווי האוטובוס במדינה הם קווים דו כיווניים. הוכיחו שיש אזור בו אין אף שני ערים שמקושרות על ידי קו אוטובוס ישיר.

3. חשבו את: $\sum_{k\le 1000} \left[\sqrt[3]{k}\right]$.

4. האם קיים פאון קמור שבו בכל פאה יש לפחות 6 קודקודים?

5. (תחרות הערים) על השולחן מונחים שני דפים וערימת מטבעות כסף. בכל צעד מבצעים את אחת משתי הפעולות הבאות:

- מוסיפים לערימה מטבע זהב אחד וכותבים את מספר מטבעות הכסף בדף הראשון
- מסירים מהערימה מטבע כסף אחד וכותבים את מספר מטבעות הזהב בדף השני.

בסופו של דבר על השולחן נותרו רק מטבעות זהב. הוכיחו כי ברגע זה סכום כל המספרים בדף הראשון שווה לסכום כל המספרים בדף השני.

6. (גיליס) בממשלה של מדינה זרה 12 שרים. לכל שר יש 5 חברים ו-6 אויבים בממשלה. כל 3 שרים מרכיבים ועדה. ועדה נקראת מתוקנת אם כל חבריה חברים או שכל חבריה אויבים. כמה ועדות מתוקנות יש?

7. ספרים מסודרים ב- K מדפים. סידרו אותם מחדש ב- K + 1 מדפים.

הוכיחו שיש ספר עבורו במדף החדש יש פחות ספרים מאשר במדף הקודם.

תרגיל המשך: הוכיחו שיש 2 ספרים כאלו.

8. הוכיחו כי בכל מצולע שקודקודיו שלמים ואף צלע שלו לא מקבילה לקווי רשת, סכום אורכי קטעי הרשת האופקיים שמוכלים במצולע שווה לסכום אורכי קטעי הרשת האנכיים שמוכלים במצולע.

9. (IMO) בתחרות מסוימת יש n (אי-זוגי) שופטים, ו- m מתחרים. כל שופט נותן ציון לכל מתחרה, וכל ציון הוא 1 או 0. כל שני שופטים הסכימו עבור לא יותר מ-k מחרים. הוכיחו כי $\frac{n-1}{2n}\le\frac{k}{m}$.

10. (IMO) בהינתן $1\le r\le n$, נתבונן בכל תתי-הקבוצות בגודל r של $\{1,2,...,n\}$, ובכל תת-קבוצה נמצא את הערך המינימלי. חשבו את הממוצע של הערכים האלה.

11. (אורנג') יש 13 מנורות במעגל. מתחת לכל מנורה יש מתג שמשנה מצב של 3 מנורות סמוכות עליו. בהתחלה יש מצב כלשהו של מנורות. צריך לשנות מצבי מתגים כדי שבסוף יהיה דלוקה מנורה אחת (כלשהי). מהו המספר המרבי של שינויי מתגים שצריך לעשות?

12. (IMO) נסמן ב-$p_n\left(k\right)$ את כמות התמורות של $\{1,2,...,n\}$ עם בדיוק k נקודות שבת.

הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=0}^{n} kp_n\left(k\right)=n!$.

13. (IMO shortlist) נתון לוח רברסי מלבני בגודל $m\times n$. בהתחלה בכל אחת ממשבצות הלוח מונח דיסק רברסי (לבן מצד אחד, שחור מצד שני). כל הדיסקים שעל הלוח מונחים עם הצד הלבן כלפי מעלה, חוץ מדיסק אחד שנמצא באחת הפינות של הלוח. מותר לבצע פעולה הבאה: בוחרים דיסק שחור, מורידים אותו מהלוח, והופכים את כל הדיסקים שבמשבצות הסמוכות (לפי צלע). לאילו n,m ניתן להוריד את כל הדיסקים מהלוח באמצעות פעולות כאלה.