

נגזרת דיסקרטית

הגדרה: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

חימום:

1. הוכח: $\Delta^k f = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k+i} f(x+i)$
2. הוכח שאם p מדרגה d אז: $p(x+k) = \sum_{i=0}^d \Delta^i p(x) \binom{k}{i}$
3. הוכח שאם p מדרגה d אז $\Delta^{d+1} p = 0$

שאלות:

1. הוכח: $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i i^j = 0$ עבור $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$.
2. הוכח: $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i i^k = k!$
3. פולינום ממעלה 3 מקיים $p(0) = 1, p(1) = 2, p(2) = 4, p(3) = 8$ מצאו את $p(4)$.
4. סדרת פיבונאצ'י מוגדרת לפי $F_1 = F_2 = 1$ ונוסחת הנסיגה $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל $n \geq 3$ שלם. נתונים $m, n \geq 1$ טבעיים. מצאו את המעלה המינימלית d כך שקיים פולינום $f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$ המקיים $f(k) = F_{m+k}$ לכל $k = 0, 1, \dots, n$.
5. הוכח שכל מספר שלם הוא סכום של 5 חזקות שלישיות (לא דווקא חיוביות).
6. א. נתון פולינום ממעלה שנייה בשני משתנים ומשושה משוכלל במישור, הוכח שסכום של ערכי הפולינום על שלושת הקודקודים עם אינדקס זוגי שווה לסכום הערכים על הקודקודים האחרים (כאשר ממספרים את הקודקודים לפי הסדר).
ב. אותה שאלה עבור פולינום 3 משתנים ממעלה שנייה על קובייה במרחב (כאשר צובעים את הקודקודים בצביעת שחמט).
7. נתון פולינום שבכל מספר שלם נותן ריבוע של מספר שלם. הוכח שהוא ריבוע של פולינום.
8. פיראט שט מסביב לים העגול, שאורכו p קילומטרים, כאשר p מספר שלם וראשוני. נקודת התחלה שלו שלמה אך לא ידועה. מהירות הפיראט היא b קמ"ש בכיוון השעון, שלמה אך גם לא ידועה. (כך שבכל שעה עגולה הפיראט נמצא ליד אחד מה- p סימני קילומטר שיש בים העגול). תותח של משמר החופים יודע לירות פעם בשעה בדיוק, בכל שעה עגולה.
א. מהי כמות שעות המינימאלית בה משמר החופים יכול בוודאות להרוג את הפיראט?
ב. אותה שאלה רק שהפעם:
 - a. מותר לירות יותר מכדור אחד כל שעה
 - b. אנחנו רוצים למזער את מספר הכדורים
 - c. אסור לירות באי הראשון (וידוע שהפיראט לא נשאר קבוע באי הראשון כל השעות).