נגזרת דיסקרטית

הגדרה: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

הגדרה: $\Delta^0 f(x) = f(x)$ וכן לכל $k \geq 1$, $\Delta^k f(x) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f(x)\right)$.

חימום 1. הוכיחו כי

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} f(x+i)$$

חימום 2. הוכיחו שאם p פולינום ממעלה d, מתקיים $\Delta^{d+1} p = 0$.

חימום 3. הוכיחו כי

$$f(x+k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i f(x)$$

שאלות

1. הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^j = 0, \qquad j = 0,1,2,\dots,k-1$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} i^k = k!$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} \binom{m+i}{n+i} = \binom{m}{n+k}$$

2. פולינום p ממעלה 3 מקיים

$$p(0) = 1, \qquad p(1) = 2, \qquad p(2) = 4, \qquad p(3) = 8$$

מצאו את $p(4)$.

3. נתונה סדרה המקיימת $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ לכל n. חשבו את

$$\frac{4(f_{n+2} + f_{n-2}) - f_{n+4} - f_{n-4}}{f_n}$$

4. נתונה סדרה המקיימת $f_0 = 0, f_1 = 1$ וכן $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. עבור $m, n \geq 1$ טבעיים, מצאו את המעלה המינימלית d עבורה קיים פולינום $p(x)$ ממעלה d, המקיים $p(k) = f_{m+k}$ לכל $k = 0,1,\dots,n$.

5. הוכיחו שכל מספר שלם הוא סכום של 5 חזקות שלישיות (לאו דווקא חיוביות).

6א. נתון פולינום ממעלה שנייה בשני משתנים ומשושה משוכלל במישור, שקודקודיו צבועים בצביעת שחמט. הוכיחו שהסכום של ערכי הפולינום על הקודקודים השחורים שווה לסכום של ערכי הפולינום על הקודקודים ה .

6ב. אותה שאלה, עבור פולינום בשלושה משתנים (עדיין ממעלה שנייה) וקובייה במרחב.

7. על ציר המספרים סומנו 32 נקודות: $0,1,\dots,31$. הראו כי ניתן לצבוע את הנקודות המסומנות בשני צבעים: אדום וכתום, כך שלכל פולינום p עם מקדמים ממשיים ומעלה שקטנה מ-5, סכום הערכים בנקודות הכתומות שווה לסכום הערכים בנקודות האדומות.

8. נסמן ב-d את המספר המינימלי עבורו קיים פולינום $p(x)$ ממעלה d המקיים: לכל n שלם, $p(n)$ שלם וכן $p(n)$ זוגי אם ורק אם $n \mid 1024$. הוכיחו ש-$d = 1023$.

9. יהי n מספר שלם חיובי. נגדיר

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : 0 \leq x,y,z \leq n\} \setminus \{(0,0,0)\}$$

קבוצה של $(n+1)^3 - 1$ נקודות במרחב התלת-מימדי (קובייה בלי אחד הקודקודים). הוכיחו כי המספר הקטן ביותר של מישורים, כך שהאיחוד שלהם מכיל את S, אבל לא את הראשית, הוא $3n$.