ספרות

הגדרה: $s(n)$ הוא סכום ספרותיו של n ברישום עשרוני.

1. מספר נקרא שמח אם יש לו 70 ספרות, כל ספרה מ-1 עד 7 מופיעה 10 פעמים בדיוק (ברישום העשרוני). נניח ש-a,b מספרים שמחים ו-b מתחלק ב-a. הראו כי $a=b$.

2. הראו שלכל שלם חיובי n, הרישום הבינארי של $15n$ מכיל לפחות ארבע פעמים את הספרה 1.

3. נגדיר סדרה $a_1=2018^{2019^{2020}}$, $a_n=s\left(a_{n-1}\right)$. מצאו את a_6.

4. עבור שלמים חיוביים x,y נגיד ש-x מכיל y אם הרישום של y מופיע ברישום של x ברצף. לדוגמה, 12345 מכיל את 34 אבל לא את 35. מצאו את כל השלמים החיוביים k בעלי התכונה הבאה: קיימים אינסוף שלמים חיוביים שלא מכילים אף כפולה של k.

5. א) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימות לכל n טבעי

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(n)=f(2n)$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),\ f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$$

ב) מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימות לכל n טבעי

$$f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3n)=3f(n)$$
$$f(3n+1)=3f(n)+2,\ f(3n+2)=3f(n)+1$$

6. אבי בחר שלם חיובי n, וחישב את הרישום העשרוני של $4^n,5^n$. התברר ששניהם מתחילים באותה ספרה. הוכיחו שספרה זו היא 2 או 4.

7. קבעו האם קיימים 2018 שלמים חיוביים שונים $n_1,n_2,...,n_{2018}$ כך ש-

$$n_1+s(n_1)=n_2+s(n_2)=...=n_{2018}+s(n_{2018})$$

8. בהינתן מספר טבעי n, נגדיר את ה-b-נגזרות שלו בתור המספרים שאפשר לקבל על ידי מחיקה של ספרה אחת בדיוק מ-n כשרושמים אותו בבסיס b.
לדוגמה, ה-10-נגזרות של 1234 הן 123,124,134,234. נאמר שמספר הוא **מדהים** אם:
(i) ל-n יש בדיוק 2017 ספרות כשרושמים אותו בבסיס 2017.
(ii) סכום כל ה-2017-נגזרות שלו הוא n בעצמו.
כמה מספרים מדהימים יש?

9. מצאו את כל הזוגות של שלמים חיוביים (a,b) כך שהסדרה $c_n=\frac{s(an)}{s(bn)}$ היא סדרה חסומה (כלומר קיים $C>0$ כך ש- $c_n<C$ לכל n).

בתאבון!