

קערות וכיפות

בכל השאלות בדף זה מדובר על קבוצות של נקודות במצב כללי (או גנרי) יעני אף 3 נקודות לא על ישר אחד.

1. הוכיחו שבאינסוף נקודות במישור יש אינסופצולע קמור.
2. נסמן ב- $N(n)$ את המספר המינימאלי של נקודות במישור שבהכרח יש n נקודות מתוכן שיוצרות מצולע קמור. הוכיחו ש- $N(4) = 5$. הוכיחו ש- $N(5) \geq 9$. אל תוכיחו ש- $N(5) = 9$.
3. הוכיחו שעבור $n > 4$ נקודות במישור יש לפחות $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}$ מרובעים קמורים.
4. הוכיחו שמ-2000 נקודות אפשר להרכיב 400 מרובעים קמורים זרים (בשטחם). * האם ניתן להרכיב קצת יותר? מה עם 500?
(אנחנו לא יודעים את התוצאה האופטימאלית.)
5. הוכיחו ש- $N(n) \geq \alpha^n$ עבור $\alpha > 1$.
6. הנקודות $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ יקראו m -כיפה אם $x_1 < \dots < x_k$ וגם
(*)
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > \dots > \frac{y_{m-1} - y_m}{x_{m-1} - x_m}$$
ויקראו m -קערה אם אי-השיויונים ההפוכים מתקיימים ב-(*). נסמן ב- $f(k, l)$ את הכמות המינימאלית של נקודות במישור במצב כללי בלי שתי נקודות עם אותו ערך בציר x עבורן בהכרח יש l -כיפה או שיש k -קערה.
הוכיחו ש- $f(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.
7. הוכיחו ש- $2^{n-2} + 1 \leq N(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 2$.
8. נסמן ב- $H(n)$ את מספר הנקודות המינימאלי במישור כך שבהכרח יש מצולע קמור עם n קודקודים מתוכן שאין בו מצולע אחד. הוכיחו ש- $H(7)$ לא קיים. אל תוכיחו: $H(5) = 10$.

בתיאבון!