

תרגיל קומבינטורי

- נתון ריבוע 11×11 שכל המשבצות שלו צבועות בלבן. בכל מהלך, בוחרים 4 משבצות לבנות, שמרכזיהן מהווים קודקודים של ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים, וצבעים שתי פינות נגדיות בשחור. התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לבצע מהלך. מצאו את המספר המקסימלי של משבצות שחורות שיכולות להיות בסוף התהליך.
- לוח 999×999 צבוע בלבן ואדום. יהי T מספר השלשות הסדורות של משבצות (C_1, C_2, C_3) , שתי הראשונות באותה שורה, שתי האחרונות באותה עמודה, כך ש- C_1 ו- C_3 לבנות ו- C_2 אדומה. מצאו את הערך המקסימלי של T .
- במינקלנד יש מספר ערים וכבישי נסיעה דו כיווניים. נתון שאפשר להגיע מכל עיר לכל עיר ב-100 נסיעות לכל היותר. בנוסף ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר במספר זוגי של נסיעות. מצאו את המספר המינימלי d כך שניתן להגיע מכל עיר לכל עיר במספר זוגי של נסיעות שאינן עולה על d .
- יהי $r \geq 2$ מספר טבעי. נתון אוסף F של אינסוף קבוצות שונות בגודל r , אף שתיים מהן אינן זרות. הוכיחו כי קיימת קבוצה בגודל $r-1$ שנחתכת עם כל קבוצה ב- F .
- תהי S קבוצה בת $n^2 + n - 1$ איברים, עבור n טבעי כלשהו. תתי הקבוצות בגודל n של S חולקו לשתי מחלקות. הוכיחו כי קיימות n קבוצות זרות בזוגות השייכות לאותה מחלקה.
- יהיו m, n מספרים טבעיים כך ש- $n \geq m$. נתונה קבוצה S של n מספרים שלמים. הוכיחו כי קיימות לפחות 2^{n-m+1} תתי קבוצות של S שסכום איבריהן מתחלק ב- m (כולל הקבוצה הריקה).
- יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. בלוח $n \times n$ רשומים כל המספרים מ-1 עד n^2 פעם אחת בדיוק. הוכיחו כי קיימות בלוח שתי משבצות בעלות צלע משותפת שהפרש המספרים ביניהן הוא לפחות n .
- דליה וצבי משחקים במשחק על הציר הממשי, שכולו לבן בהתחלה. לצבי יש דלי של דיו עם 4 ליטר דיו שחור. ליטרים של דיו מספיקים כדי להשחיר קטע באורך p . בכל סיבוב, דליה בוחרת מספר טבעי m ומקצה $\frac{1}{2^m}$ ליטר דיו מהדלי. צבי בוחר שלם אי שלילי k ומשחיר את הקטע $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right]$ (שאוילי חלק ממנו הושחיר קודם לכן). המטרה של דליה היא להגיע למצב שהדלי ריק והקטע $[0,1]$ עוד לא לגמרי שחור. האם יש אסטרטגיה שבאמצעותה דליה יכולה לנצח במספר סופי של מהלכים?

בתאבון!