

תרגיל קומבינאטורי

1. ב-M ארגזים נמצאים פירות: אגסים, בננות וגויאבות. עידו רוצה לקחת לעצמו K ארגזים כך שהוא יקבל לפחות חצי מהאגסים, לפחות חצי מהבננות, ולפחות חצי מהגויאבות. האם הוא מסוגל לעשות זאת?
א. כאשר $M = 99, K = 50$ ב. כאשר $M = 100, K = 51$?

2. N ילדים בעלי גבהים שונים עומדים בשורה. מחלקים אותם למספר המינימלי של קבוצות ילדים עוקבים, כך שבכל קבוצה הילדים מסודרים לפי גובהם, עם הגבוה ביותר מימין (תיתכנה קבוצות של ילד אחד). לאחר מכן הופכים את סדר הילדים בתוך כל קבוצה. הוכיחו כי לאחר $N-1$ צעדים כאלה כל הילדים יעמדו מסודרים לפי גובהם, כך שהגבוה ביותר משמאל.

3. האם קיימת תת-קבוצה אינסופית A של $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ עבורה מתקיים: לכל מספר רציונאלי חיובי שלא גדול מ-1 יש ייצוג יחיד כסכום של תת-קבוצה סופית של A.

4. במישור נמצאים $2N$ נקודות במצב כללי (אף 3 נקודות לא על ישר אחד), שחולקו לזוגות, ובכל זוג שתי הנקודות חוברו באמצעות קטע. בכל שלב ושלב בוחרים שני קטעים שנחתכים, ומחליפים אותם בשני קטעים אחרים שמחברים את 4 הקצוות שלהם בזיווג אחר. מהי הכמות המרבית של מהלכים שאפשר לעשות?

5. נתונה טבלה מלבנית. בכל משבצת רשום 0, 1, 2 או 3. שתי משבצות נקראות סמוכות אם יש להן צלע משותפת. נתון שבשתי משבצות סמוכות לא יכול להיות רשום 0 ו-2. כמו כן, נתון שבשתי משבצות סמוכות לא יכול להיות רשום 1 ו-3. בכל המשבצות שסמוכות לשפה רשומים אפסים. הוכיחו שכמות הקודקודים שמסביב להם רשומים המספרים 0, 1, 2, ו-3 נגד כיוון השעון שווה לכמות הקודקודים שמסביב להם רשומים אותם המספרים לפי כיוון השעון.

6. בגן ילדים יש 27 ילדים. ביום כיף מחלקים אותם ל-K קבוצות, כאשר כל קבוצה עוסקת בפעילות שונה. היועצת החינוכית הכינה רשימה של 10 שלישיות שונות של ילדים; לא מומלץ שכל 3 הילדים מאותה שלישייה ברשימה של היועצת יהיו באותה קבוצה כי אז הם ילכו מכות במקום לעסוק בפעילות הכיפית (אבל מותר ששניים מהם יהיו באותה קבוצה). עבור איזה K קטן ביותר ניתן בוודאות לארגן יום כיף בהתאם להמלצות של היועצת החינוכית?

7. מתוך 100 סוללות בדיוק 51 הן תקינות. כשמכניסים 2 סוללות תקינות לפנס, אז הפנס דולק. עבור איזה N קטן ביותר ניתן ב-N בדיקות בוודאות להפריד בין סוללות תקינות לבלויות?

8. ביקום מקביל חיים 30 אֶלפים בני אלמוות שנוצרו באותו יום בו נוצר היקום. חברות הוא יחס הדדי אצל האלפים. בכל שנה מתרחש אחד מהשניים: או שאלף שהיו לו פחות מ-10 חברים מוצא חבר חדש, או ששני אלפים שיש לכל אחד מהם יותר מ-10 חברים מפסיקים להיות חברים.

א. האם יתכן שיקום זה יתקיים 1000 שנים?

ב. מהו המספר הגדול ביותר של שנים שיקום יוכל להתקיים?

9. במסיבה נמצאים N אנשים. לא קיימים אף 4 אנשים שאפשר להושיב סביב שולחן עגול כך שכל אחד יכיר רק את אלה שיושבים לידו ולא את זה שמולו. הראו כי יש לא יותר מאשר $\frac{N(N-1)}{2}$

קליקות מקסימליות (כלומר כאלה שלא ניתנות להרחבה).