אי-שוויונים קומבינאטורים

1. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים חיוביים. הוכיחו כי
$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)\cdot \ldots \cdot(1+a_n)} < 1$$
2. עבור $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ הוכח כי
$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \ge x_n + 2n.$$
3. הוכיחו כי $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2024^2}+\frac{1}{2025^2}} < 1012.5$.
4. הוכיחו שאם מספרים ממשיים $a_1,\ldots,a_n$ מקיימים את התנאי $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge \sqrt{(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)}$, אז אף אחד מהמספרים אינו שלילי.

5. נתונה סדרה $\{a_i\}_{i=1}^n$ ותמורה שלה $\{b_i\}_{i=1}^n$. הוכיחו: $\sum_{i<j}(a_i - b_i)(a_j - b_j) \le 0$.
6. נתונות שתי סדרות באורך n המקיימות $\sum a_i = 1 = \sum b_i$,
הוכיחו כי $\sum_{i<j} a_i a_j + \sum_{i<j} b_i b_j + \sum_i a_i b_i \le 1$.
7. בהינתן $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$, ובנוסף $r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_n \ge 0$, הוכיחו כי
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \cdot \min(r_i, r_j) \ge 0$$
8. נתון כי $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. נסמן $m = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
$M = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. הוכיחו כי $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le -nmM$.

9. עבור $n \ge 3$, $x_1,\ldots,x_n > 0$ מתקיים $n^2 + 1 \ge (x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$.
הוכיחו כי לכל i, j, k שונים x_i, x_j, x_k הן צלעות משולש.
10. נתונים חמישה מספרים חיוביים, עבורם סכום של חמשת ריבועי המספרים שווה לסכום של עשרת המכפלות של זוגות המספרים.
א. הוכיחו כי בין חמשת המספרים קיימים שלושה מספרים שלא מקיימים אי-שוויון המשולש.
ב. הוכיחו כי יש לפחות שש שלשות כאלה.

יש עוד עמוד ↓

11. עבור $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$. מצאו את המקסימום של הביטוי $\sum_{cyc}\left(x_i - x_i x_{i+1}\right)$.

12. בהינתן $n>2$, והמספרים $x_1,x_2,\dots,x_n \ge 0$, הוכיחו כי

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \ge \frac{\sum_{i<j}\left|x_i - x_j\right|}{n} + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

13. נתונים $a,b>0$ ממשיים קבועים, ונתון n טבעי קבוע. יהיו $x_1,\dots,x_n \ge 0$ ממשיים עבורם $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. נתונה פונקציה $f(x) = (a+x)(b+x)$. מצאו את הערך המירבי (שתלוי ב-a,b,n) של הביטוי $\sum_{i<j}\min\left(f(x_i), f\left(x_j\right)\right)$.

14. עבור $x_1,x_2,\dots,x_n \in [a,b]$, כאשר $0<a<b$, הוכיחו

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \le \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

15. נתון n טבעי. מצאו את המספר הממשי k הגדול ביותר עבורו לכל n מספרים ממשיים $x_1,x_2,\dots,x_n$ מתקיים אי-שוויון:

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2+x_n^2} \ge k\cdot\min(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,\dots|x_{n-1}-x_n|,|x_n-x_1|)$$

16. יהיו $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_{2n}$ מספרים ממשיים. הוכיחו את האי-שוויון:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{2n})^2 \ge 4n(x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+\ldots+x_nx_{2n})$$

17. נתונים מספרים חיוביים המקיימים $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x_i}-1} \ge (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_i}-1}}$.

18. בכל משבצת של טבלה רשום מספר ממשי. משבצת תקרא אוכף, אם המספר שלה מקסימאלי בעמודה, ומינימאלי בשורה. ניקח טבלה בה במשבצת (i,j) רשום מספר $\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$, כאשר a_i,b_i מספרים ממשיים, p_i, q_i מספרים חיוביים. הוכיחו כי בטבלה זו יש אוכף.

בהצלחה!!