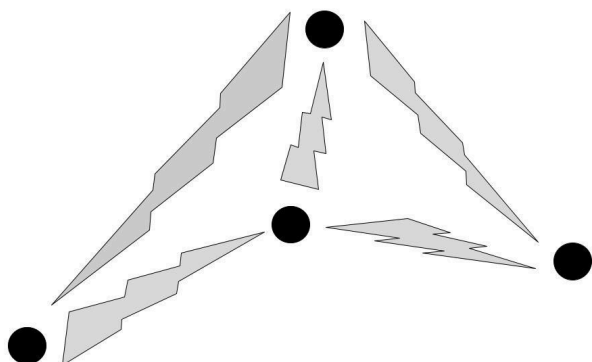


# גרפים טעונים



## הגדרות:

1. דרגת הקודקוד  $v$   $d(v) :=$
2. כמות הצלעות של פאה  $f$   $d(f) :=$
3. הדרגה המינימלית של קודקוד ב  $G$   $\delta(G) :=$

## נוסחא:

עבור גרף מישורי  $G$ . לכל  $0 \leq \alpha \leq 1$ , מתקיים:

$$\sum_{v \in V} (\alpha \cdot d(v) - 2) + \sum_{f \in F} ((1 - \alpha) \cdot d(f) - 2) = -4$$

## שאלות:

1. יהי גרף מישורי  $G$  כך ש  $\delta(G) \geq 2$  וממוצע הדרגות קודקודיו קטן מ 3. הוכיחו שקיים ב  $G$  קודקוד  $v$  מדרגה 2 ויש לו שכן  $u$  כך ש  $d(u) \leq 5$ .
2. יהי גרף מישורי  $G$  כך ש  $\delta(G) \geq 2$ , וגודל המעגל הקצר ביותר ב  $G$  הוא לפחות 7. הוכיחו שקיימת ב  $G$  קשת שסכום דרגות שני קודקודיה הוא 5 לכל היותר.
3. יהי פיאון שאין לו פאות שהן מרובעות או מחומשות. הוכיחו שיש לו לפחות 4 פאות שהן משולשיות.
4. יהי גרף מישורי  $G$  שאין בו שני פאות משולשיות עם צלע משותפת ודרגת הקודקוד המקסימלי היא  $D \geq 7$ . הוכיחו כי ניתן לצבוע את קשתות הגרף ב  $D + 1$  צבעים כך שאין קודקוד שיש לו שתי קשתות באותו צבע.
5. יהי גרף מישורי  $G$  כך ש  $\delta(G) \geq 5$ . הוכיחו כי קיימת צלע שסכום הדרגות של שני קודקודיה קטן שווה 11.
6. נתון ריבוע שמחולק לכמות סופית של משולשים. הוכיחו שבחלוקה קיימים שני משולשים בעלי צלע משותפת.
7. גרף גפרורים הוא גרף מישורי שכל הצלעות שלו הן קטעים ישרים באורך 1. האם קיים גרף גפרורים כך שדרגת כל קודקודיו היא 5? (יכולים להיות שני קודקודים במרחק 1 שאין בניהם קשת)
8. יהי גרף מישורי  $G$  כך ש  $\delta(G) \geq 3$ , בנוסף ב  $G$  אין מעגלים בגודל 4 ולכל  $4 \leq j \leq 9$  אין ב  $G$  פאה מדרגה  $j$ . הוכיחו כי  $G$  הוא 3-צביע.
9. גרף קוואזי-מישורי הוא גרף שבו מותר לקשתות לחתוך אחת את השניה אבל אסור שיהיו 3 קשתות שכל שתיים מהן נחתכות. הוכיחו שבגרף קוואזי מישורי  $G$  כך ש  $|V| \geq 3$  מתקיים:

$$(א) |E| \leq 10|V| - 20$$

$$(ב) |E| \leq 8|V| - 20$$