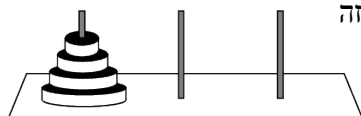


בינומי

בכל התרגיל p מסמן מספר ראשוני, ספרות של מספר שלם אי-שלילי n בבסיס p הן n_s, \dots, n_1, n_0 .



1. מגדלי האנוי (אם n דיסקים) משרים גרף: מצב של משחק הוא קודקוד, קשת זה מהלך חוקי. ניתן להגדיר גם גרף ממשולש פסקל מודולו 2, עד לשורה 2^{n-1} כולל: קודקודים הם אחדים, קשתות מחברים קודקודים שנמצאים במרחק אחד זה מזה בשריג משולשי. הראו כי זה אותו הגרף.



2. אם $1 \leq j, k \leq p-1$ וגם $p-1 \mid n-k$ אז

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{p-1+j} + \binom{n}{2(p-1)+j} + \binom{n}{3(p-1)+j} + \dots = \binom{k}{j} \pmod{p}.$$

3. רושמים 3^k שורות התחלתיות של משולש פסקל מודולו 3. כמה פעמים מופיע שם 1 וכמה פעמים מופיע 2?

4. כמה מספרים שלא מתחלקים ב- p יש ב- p^k שורות התחלתיות של משולש פסקל?

5. נניח כי $m = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_r}$, כאשר $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r$. הראו שכמות המספרים אי-זוגיים ב- m שורות התחלתיות של משולש פסקל שווה ל- $3^{\alpha_1} + 2 \cdot 3^{\alpha_2} + 2^2 \cdot 3^{\alpha_3} + \dots + 2^{r-1} \cdot 3^{\alpha_r}$.

6. נתון p ראשוני. עבור אילו ערכים של n המספרים $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n-1}$ בו-זמנית

א. כולם מתחלקים ב- p ב. כולם לא מתחלקים ב- p .

7. הראו שלכל n קיים μ כך ש- $\frac{n!}{p^\mu} \equiv (-1)^\mu n_0! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_s! \pmod{p}$.

8. נסמן $f_{n,a} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^a$. הראו כי $f_{n,a} \equiv \prod_{i=0}^s f_{n_i,a} \pmod{p}$.

9. יהי $p = 4k + 3$ ראשוני. חשבו את $\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2+1} \pmod{p}$.

10. נתונים k, m שלמים אי-שליליים, ו- $p \geq 5$ ראשוני. הוכיחו שהמספר $\binom{pm}{pk} - \binom{m}{k}$ מתחלק ב-

א. p ב. p^2 ג. p^3 .

11. הראו כי א. $\binom{p^2}{p} \equiv p \pmod{p^5}$ ב. $\binom{p^3}{p^2} \equiv \binom{p^2}{p} \pmod{p^8}$.