חישוב בגאומטריה

פתרונות חישוביים בלבד! (במרוכבים, בריצנטריות,...)

1. על המעגל החוסם של משולש ABC נבחרה נקודה P. הוכיחו כי השיקופים של P ביחס לשלושת הצלעות AB, AC, BC נמצאים על ישר אחד.

2. במשולש ABC, המעגל החסום מבחוץ מול A משיק לצלע BC בנקודה A_1. בצורה דומה מוגדרת הנקודה B_1. הישרים AA_1, BB_1 נפגשים ב- N. הישר AA_1 חותך את המעגל החסום במשולש בשתי נקודות, כאשר Q האחת שקרובה יותר ל- A. הוכיחו כי $AQ = NA_1$.

3. נתון מרובע $APBQ$ כך ש $\angle P = \angle Q = 90°$ וגם $AP = AQ < BP$. נקודה X נעה על הקטע PQ. נקודות T, M נעות על הקשת $\widehat{PBQ}$ כך ש- M, X, A ישר ו- $TX \perp AX$. הוכיחו כי אמצע הקטע TM נע על מעגל קבוע.

4. המשולש ABC חסום במעגל Ω שמרכזו O. הנקודה P נבחרה על Ω בשרירותיות. מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים AOP, BOP, COP הם בהתאמה O_A, O_B, O_C. יהיו ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C בהתאמה האנכים מ- O_A, O_B, O_C לצלעות BC, AC, AB. הוכיחו כי המעגל החוסם של המשולש שצלעותיו ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C משיק ל-OP.

5. במשולש ABC הגבהים הם AH_1, BH_2, CH_3. המעגל החסום ω משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות T_1, T_2, T_3 בהתאמה. נשקף את שלושת הישרים H_1H_2, H_1H_3, H_2H_3 ביחס לישרים T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3 בהתאמה. הוכיחו שקודקודי המשולש שנוצר נמצאים על ω.

6. יהי ABC משולש ו-P נקודה מחוצה לו. נניח שהישרים AP, BP, CP חותכים את הישרים BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. נניח בנוסף ששטחי המשולשים PBD, PCE, PAF שווים. הוכיחו שהם גם שווים לשטח המשולש ABC.

7. נתון משולש ABC עם מרכז מעגל חסום I ומרכז מעגל חוסם O. נסמן ב- H את מפגש הגבהים במשולש BIC. נסמן ב-T את הנקודה על המעגל החוסם של ABC עבורה $\angle ATI = 90°$. נסמן ב- X את החיתוך השני של המעגל החוסם של AOI והישר HI. הוכיחו כי חיתוך הישרים AX ו- HT נמצא על המעגל החוסם של משולש ABC.

8. נקודות P, Q נמצאות בתוך משולש ABC, כך ש $\angle ABP = \angle QBC$ ו- $\angle ACP = \angle QCB$. הוכיחו כי P, Q, B, C נמצאות על מעגל אחד אם ורק אם $AP = AQ$.

9. מפגש הגבהים במשולש ABC הוא H. חוצה הזווית $\angle BAC$ פוגש את (AHC) שוב ב- P. מפגש הגבהים ב- APC יסומן Y, ומרכז (APB) יסומן X. הוכיחו כי $|XY|$ שווה לרדיוס המעגל החוסם של ABC.

10. משולש ABC חסום במעגל Ω. נבחר ישר ℓ שמשיק ל- Ω בנקודה שהיא לא קודקוד של המשולש. השיקופים של ℓ ביחס לצלעות BC, AC, AB יסומנו ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C בהתאמה. הוכיחו כי המעגל החוסם של המשולש שצלעותיו ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C משיק ל- Ω.

בתיאבון!

דף נוסחאות

מרוכבים:

שיקוף של z ביחס לישר ab:

$$w = \frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}$$

אם a, b על מעגל היחידה:

$$w = a + b - ab\bar{z}$$

חיתוך הישרים ab, cd:

$$x = \frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(c-d) - (a-b)(\bar{c}d - c\bar{d})}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d) - (a-b)(\bar{c}-\bar{d})}$$

אם a, b, c, d על מעגל היחידה:

$$x = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

מרכז מעגל חוסם של abc:

$$o(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & a\bar{a} & 1 \\ b & b\bar{b} & 1 \\ c & c\bar{c} & 1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}$$

מפגש גבהים ב- abc:

$$h = a + b + c - 2o(a,b,c)$$

בד"כ משתמשים ש- $o = 0$.

בריצנטריות:

נוטציה: עבור $x + y + z = 1$, נגדיר

$$(x, y, z) = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$$

(לא תלוי בבחירת ראשית).
משוואת ישר:

$$(x, y, z) : c_x x + c_y y + c_z z = 0, (c_x, c_y, c_z) \neq (0, 0, 0)$$

משוואת מעגל:

$$(u, v, w) : \sum_{cyc} a^2 vw = (u + v + w)(\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

וקטורי תזוזה: עבור P, Q מנורמלים, נגדיר

$$\vec{PQ} = P - Q$$

כאשר ההפרש נעשה קואורדינטה-קואורדינטה.
אנכות: וקטורי תזוזה $\vec{PQ} = (x, y, z), \vec{RS} = (u, v, w)$ מאונכים אמ"מ

$$\sum_{cyc} a^2(vz + wy) = 0$$

אורך: אורך של וקטור תזוזה $\vec{PQ} = (x, y, z)$ (המרחק מ- P, Q) מקיים

$$|PQ|^2 = -\sum_{cyc} a^2 yz$$

שטח מכוון של משולש PQR, עבור $P = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2), R = (x_3, y_3, z_3)$ מנורמלים:

$$[PQR] = [ABC] \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

בפרט נקודות על ישר אמ"מ הדטרמיננטה מתאפסת.