תרגיל אלגברי

1. מצאו את כל השלשות (a,b,c) של שלמים, כך שקיים $n \geq 1$ וקיימים שלמים $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2 \dots, y_n$ עבורם מתקיים $\sum x_i^2 = a, \sum y_i^2 = b, \sum x_i y_i = c$.

2. המספרים $1,2,\dots,n^2$ מסודרים בסדר כלשהו בטבלה $n \times n$. לכל זוג מספרים הנמצאים באותה שורה או באותה עמודה, מחשבים את היחס בין הגדול לקטן (כך שמתקבל מספר הגדול מ-1). לאחר מכן, רושמים על הלוח את היחס הכי קטן מבין $n^2(n-1)$ היחסים. מה המספר הגדול ביותר שיכול להיות רשום על הלוח?

3. יהי $n \geq 1$. סדרות שלמים $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ נקראות ידידות, אם $|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq 1$. כמה סדרות שונות באורך n ניתן לבחור, כך שכל שתיים מביניהן ידידות?

4. בהינתן סדרה $x_1, x_2, \dots, x_n$ של ממשיים, נגדיר את המחיר שלה להיות $\max_{1\leq i\leq n} |x_1 + \dots + x_i|$.
נתונה רשימה של n מספרים ממשיים, ואיילה וברווז רוצים לסדר אותם בסדרה עם מחיר נמוך. איילה בודקת את כל התמורות האפשריות, ובוחרת את הסידור שנותן את המחיר הכי נמוך A. לעומת זאת, ברווז פועל בשיטה החמדנית: בתחילה הוא בוחר x_1 מהרשימה עבורו $|x_1|$ מינימלי, לאחר מכן בוחר מהמספרים הנותרים x_2 עבורו $|x_1 + x_2|$ מינימלי, וכן הלאה. המחיר הסופי של הרשימה של ברווז הוא B.

   מצאו את הקבוע המינימלי $c \geq 0$ כך שלכל n ולכל רשימה אפשרית, מתקיים $A \leq cB$.

5. קבעו לאילו ערכי $n \geq 1$ הטענה הבאה נכונה:
נתונים מספרים ממשיים $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ המקיימים $|a_k| + |b_k| = 1$ לכל k. אז קיימים $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ שכל אחד מהם הוא ± 1, כך ש- $|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k| + |\sum_{k=1}^n \varepsilon_k b_k| \leq 1$.

6. השלמים החיוביים נצבעו בשלושה צבעים, כך שאם x, y צבועים בשני צבעים שונים, $x^2 - xy + y^2$ צבוע בצבע השלישי. האם בהכרח כל המספרים נצבעו באותו הצבע?

7. קטע פתוח בישר הממשי נקרא n-מגביל אם לכל פולינום ממעלה n שמקדמו המוביל הוא 1 ושאר המקדמים שייכים לקטע, אין אף שורש ממשי. מהו האורך המקסימלי של קטע 2018-מגביל?

8. קבעו לאילו ערכי $a > 0$ קיימת סדרה אינסופית וחסומה $x_0, x_1, x_2, \dots$ של ממשיים כך שלכל $i \neq j$, מתקיים
$$\left|x_i - x_j\right| \geq |i-j|^{-a}$$

9. יהי $n \geq 3$. סדרת מספרים ממשיים $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ תיקרא מבריקה אם לכל תמורה שלה $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ מתקיים $y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_4 + \dots + y_{n-1} y_n \geq -1$. מצאו את הקבוע הגדול ביותר $K = K(n)$ כך שלכל $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ מבריקה, מתקיים $\sum_{i\neq j} x_i x_j \geq K$.

10. הוכיחו שקיימים אינסוף שלמים חיוביים n שאינם חזקה שלישית, כך שאם נגדיר a, b, c על ידי
$$a = \sqrt[3]{n},\ b = \frac{1}{\{a\}},\ c = \frac{1}{\{b\}}$$
אז קיימים שלמים r, s, t, לא כולם 0, כך ש-$ra + sb + tc = 0$.

11. נתון שלם חיובי n שאינו חזקה שלישית. הוכיחו שקיים $C > 0$ כך שלכל שלם חיובי m, מתקיים
$$\left\{m\sqrt[3]{n}\right\} + \left\{m\sqrt[3]{n^2}\right\} \geq \frac{C}{\sqrt{m}}$$

12. נתונות סדרות $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ ו- $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \cdots$ של מספרים ממשיים המקיימות:
1) אם $a_i + a_j + a_k = a_r + a_s + a_t$ אז (i,j,k) היא תמורה של (r,s,t);
2) קבוצת ההפרשים $\{a_i - a_j \mid i,j \geq 0\}$ זהה לקבוצת ההפרשים $\{b_i - b_j \mid i,j \geq 0\}$.

הוכיחו כי הסדרות זהות.

בתיאבון!