

תרגיל בשובך יונים לירדן תשפ"ג

1. בתוך משולש שווה צלעות בעל אורך צלע 1 סימנו חמש נקודות. הוכיחו שיש לפחות שתי נקודות מסומנות שמרחקן הוא לכל היותר חצי.
2. א. מה הכמות המקסימלית של מספרים שלמים שונים בין 1 ל n , שניתן לרשום על הלוח, כך שכל שני מספרים שרשומים- לא זרים?
ב. מה הכמות המקסימלית של מספרים שלמים שונים בין 1 ל n , שניתן לרשום על הלוח, כך שאף מספר לא מחלק אף מספר אחר?
3. נצבע את כל נקודות השריג השלמות במישור ב k צבעים. הוכיחו שקיים מלבן עם צלעות מקבילות לצירים שקודקודיו על השריג והם צבועים באותו צבע.
4. פרש משוכלל הוא כלי, שעושה שני צעדי פרש ברצף. מה הכמות המקסימלית של פרשים משוכללים שניתן למקם על לוח שח, כך שאף שניים לא יאיימו זה על זה?
5. א. נתונה במישור צורה, ששטחה הכולל קטן מ-1. במישור נתון גם שריג הנקודות השלמות. הראו שניתן להזיז את הצורה, כך שהיא לא תכיל אף קודקוד של השריג.
ב. כעת נתונה צורה ששטחה הכולל הוא יותר מ-1. הוכיחו שקיימות שתי נקודות שונות בצורה, שהוקטור המחבר ביניהן בעל שתי קואורדינטות שלמות.
6. הוכיחו, שלכל מספר ראשוני $2019 < p$ קיים פלינדרום, שמספר ספרותיו לא גדול מ 449, המתחלק ב p .
7. מצאו את הקבוע C המקסימלי, כך שלכל x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ממשיים חיוביים, קיימים ארבעה אינדקסים שונים i, j, k, l כך ש:

$$\left| \frac{x_i}{x_j} - \frac{x_k}{x_l} \right| \geq C$$

8. נקודה (x, y) במישור עברה א ו- y שניהם שלמים חיוביים קטנים או שווים ל-20 תקרא אתר. תחילה, כל 400 האתרים פנויים. איילה וברוזה מניחים אבנים בתורות, איילה ראשונה. בתורה, איילה מניחה אבן אדומה חדשה על אתר פנוי, כך שהמרחק בין כל שני אתרים עליהם מונחות אבנים אדומות שונה מ $\sqrt{5}$. בתורה, ברוזה מניח אבן כחולה חדשה על אתר פנוי כלשהו (לאחר עליו מונחת אבן כחולה מותר להיות בכל מרחק שהוא מכל אתר אחר). הם מפסיקים ברגע ששחקן כלשהו לא מסוגל להניח אבן בתורה. מצאו את השלם הגדול ביותר K עבורו איילה יכולה להבטיח שהיא תניח לפחות K אבנים אדומות, לא משנה איך ברוזה יניח את האבנים הכחולות שלו.
9. יהי x מספר אי-רציונלי. הוכיחו כי קיימים אינסוף זוגות של מספרים שלמים $(n, m), m \neq 0$ כך ש:

$$0 < \left| x - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{m^2}$$

10. הפרש המלכותי הוא כלי משחק, שמאיים על המשבצות אליהן ניתן להגיע בשני צעדים - צעד פרש ולאחר מכן צעד מלך. מה המספר המקסימלי של פרשים מלכותיים שניתן למקם על לוח n על n , כך שאף אחד לא יאיים על האחר, כאשר:
א. $n = 12$?
ב. $n = 21$?

בתאבון!