

נקודת הפלא

בשאלות 1 עד 8 מדובר במשולש ABC החסום במעגל Ω . נסמן את אמצע BC ב- M ואת החיתוך השני של התיכושקף מ- A עם Ω ב- D .

נגדיר את נקודת הפלא X_A להיות נקודת החיתוך השנייה של המעגלים שעוברים ב- A ומשיקים לישר BC בקודקודים B ו- C .

1. הראו כי X_A היא עקב האנך מנקודת מפגש הגבהים H לתיכון מ- A .

2. הראו כי X_A צמודה איזוגונלית לאמצע של AD .

3. הראו כי D ו- X_A סימטריות ביחס ל- BC .

4. נסמן ב- E, F את עקבי הגבהים מ- B ו- C . חוצה הזווית של A נחתך עם BC ו- EF בנקודות V ו- U בהתאמה. האנכים מ- U ל- EF ומ- V ל- BC נפגשים בנקודה P . הוכיחו כי AP חוצה את BC .

5. E ו- F הם עקבי הגבהים מ- B ו- C . נתונים שני מעגלים שעוברים ב- A ו- F ומשיקים לצלע BC בנקודות P ו- Q . תהי U נקודת החיתוך של PF עם EQ . הוכיחו כי $AEFU$ חסום במעגל.

6. נסמן ב- R את חיתוך התיכושקף מ- A עם הצלע BC . האנך מ- R לצלע נחתך עם התיכון מ- A בנקודה P . הישר המקביל ל- BC ועובר ב- P נחתך עם AB, AC בנקודות E, F בהתאמה. הוכיחו כי X_A היא נקודת מפגש האלכסונים בטרפז $BCEF$.

7. על הצלעות BC, AC, AB נבחרו נקודות U, V, W כך ש- $\angle AUB = \angle BVC = \angle CWA$. המעגלים AVW, BUW נפגשים בנקודה P . G היא נקודת מפגש התיכונים במשולש. הוכיחו כי $\angle HPG = 90^\circ$.

8. על המשיק ב- B למעגל החוסם של ABM נבחרה נקודה K כך ש- $\angle KAB = 90^\circ$. הישרים CK ו- AM נחתכים בנקודה J . הראו כי מרכז המעגל AJK נמצא על הישר BC .

9. במרובע $ABCD$ האלכסונים נחתכים ב- E . נסמן ב- P את חיתוך המעגלים החוסמים של ABE ו- CDE . נקודת הפלא ביחס ל- P במשולשים ABP ו- CDP יסומנו ב- M ו- N . הוכיחו כי AD, BC ו- MN נחתכים בנקודה אחת.

10. במשולש ABC נסמן ב- T את נקודת חיתוך המשיקים למעגל החוסם ב- B ו- C . נתונה נקודה P בתוך המשולש. נסמן ב- D את החיתוך של AP עם המעגל החוסם וב- E, F את החיתוכים של BP ו- CP עם AC ו- AB בהתאמה. המעגל החוסם של AEF חותך את המעגל החוסם של ABC שנית ב- K . ישר TD חותך את המעגל החוסם של ABC שנית ב- U . הוכיחו כי השיקוף של U ביחס ל- BC נמצא על המעגל החוסם של PDK .

11. במרובע $ABCD$ מתקיים $\angle B = \angle D$. חוצי הזוויות של B ושל D נפגשים ב- P וחותרים את AC בנקודות E ו- F בהתאמה. נקודה M היא האמצע של AC . הישרים MB, MD נחתכים שנית עם המעגל BPD בנקודות X, Y בהתאמה. הוכיחו ש- XE, YF והאנך מ- P ל- AC נחתכים בנקודה אחת.

בתאבון!