תרגיל Vieta

1. לפתור מערכות משוואות:

א. $\begin{cases} a+b+c=6 \\ a\cdot b\cdot c=6 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{11}{6} \end{cases}$ ב. $\begin{cases} a+b+c=1 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^2+b^2+c^2=15 \\ a^3+b^3+c^3=51 \end{cases}$

2. נתונים מספרים a,b,c המקיימים $a+b+c=0$.

חשבו את $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^5+b^5+c^5}$ (בהנחה שהביטוי מוגדר).

3. מספרים שלמים (שונים מ-0) a,b,c כך ש- $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ וגם $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ שלמים. הראו כי $|a|=|b|=|c|$.

4. מספרים שלמים a,b,c,d מקיימים: $a+b+c+d$ מתחלק ב-17 וגם $a^3+b^3+c^3+d^3$ מתחלק ב-17.

הראו כי $a^{27}+b^{27}+c^{27}+d^{27}$ מתחלק ב-17.

5. שורשי המשוואה $x^3-16x^2-57x+1=0$ הם a,b,c.

א. הוכיחו כי a,b,c ממשיים.

ב. הוכיחו כי $\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{c}=1$.

6. למצוא את כל זוגות השלמים (a,b) המקיימים $a\mid b^2+1$ וגם $b\mid a^2+1$.

7. הוכיחו כי אם $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ שלם אז הוא אפילו ריבוע שלם.

8. חשבו את $\tan^2(1^\circ)+\tan^2(3^\circ)+\tan^2(5^\circ)+\tan^2(7^\circ)+\ldots+\tan^2(89^\circ)$.

9. מצולע משוכלל $A_1A_2\ldots A_n$ חסום במעגל יחידה. מצאו את $A_1A_n\cdot A_2A_n\cdot A_3A_n\cdot\ldots\cdot A_{n-1}A_n$ (מכפלת המרחקים מאחד הקודקודים לכל הקודקודים האחרים).

10. הראו כי $\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^2-2a\cos\left(\varphi+\frac{2\pi k}{n}\right)\right)=1+a^{2n}-2a^n\cdot\cos(n\cdot\varphi)$.

בתאבון!