בדיקה בנקודות

״תּוֹרֵי זָהָב נַעֲשֶׂה־לָּךְ עִם נְקֻדּוֹת הַכָּסֶף״ – שיר השירים א, יא

כל הפונקציות מרוכבות והנקודות בהתאמה.

הגרסה הקלאסית

“Be extremely subtle, even to the point of formlessness.” – Sun Tzu, The Art of War

נסתכל על נקודה $(x;y)$ בישר הפרויקטיבי ונגדיר באמצעותה נקודה אחרת $(P(x,y);Q(x,y))$, כאשר P,Q פולינומים הומוגניים ממעלה d, שתקרא מעלת הנקודה. שאלות רבות דורשות להוכיח כי שתי נקודות שזזות ביחס לנקודה משותפת(שיכול להיות שהיא אחת מהן) זהות, לכן נרצה לבדוק אם שתי נקודות ממעלות d_1,d_2 זהות

$$\left(P_1(x,y);Q_1(x,y)\right)=\left(P_2(x,y);Q_2(x,y)\right)$$

$$P_1(x,y)Q_2(x,y)-P_2(x,y)Q_2(x,y)=0$$

נשים לב שכל (x,y) שבו הנקודות זהות הוא מחלק של הביטוי בצד שמאל, לכן יש לכל היותר d_1+d_2 כאלה, לכן אם נמצא d_1+d_2+1 ערכים שכאלה, נוכיח את הטענה. המקרה הפרטי בו $d_1=d_2=1$, כלומר שתי הנקודות הן פרויקטיביות במקורית, זוכה לתהילת עולם כ- ״בדיקה בשלוש נקודות״.

א. נתונות נקודות A,B על מעגל α וישרים l_1,l_2. נסמן נקודה זזה X על l_1, נגדיר $\{Z,X\}=\alpha\cap AX$ ו- $Y=BZ\cap l_2$, הוכיחו שY פרויקטיבית בX.

ב. הוכיחו את משפט פסקל.

ג. נתונים שלושה ישרים l_1,l_2,l_3 ונקודות זזות X,Y ממעלות d_1,d_2 על l_1,l_2, נסמן $Z=XY\cup l_3$.

1. מה מעלת Z?
2. אבל מה אם ההעתקה מX לY היא הטלה מנקודה קבועה? (הסבירו במילים שלכם)
3. נגיד שהמעלה האפקטיבית של נקודה $(P(x,y);Q(x,y))$ מוגדרת $d'=d-\deg\gcd(P,Q)$. נגיד שנקודה היא אפקטיבית אם $d=d'$. מצאו ביטוי למעלה האפקטיבית של Z בהנתן שX,Y אפקטיביות. (הביטוי לא בהכרח מכיל רק את המעלות של X,Y)
4. מעלה אפקטיבית עוזרת לנו לבדוק בפחות נקודות?

ד. נתונים זוג ישרים l_1,l_2 וזוג נקודות A,B על l_1,l_2. נתונה נקודה זזה X על l_1. נגדיר α מעגל חוסם של ABX, נסמן $\{B,Y\}=\alpha\cap l_2$.

1. הוכיחו שY פרויקטיבית בX.
2. כמו בא׳, מצאנו מעין מבנה פנימי של ישר פרויקטיבי בקבוצת המעגלים דרך A,B, מצאו את מבנה זה בפירוש והשתמשו בו כדי להוכיח את 1 אלגברית.

ה. בהינתן מעגל α ושתי נקודות X,Y שזזות עליו ממעלה d_1,d_2, מה מעלת חיתוך XY עם ישר קבוע l?(**)

שניוניות ואני

“10 points from Gryffindor” – Severus Snape

א. נתונות נקודות A,B כך שA על מעגל α וישרים l_1,l_2. נסמן נקודה זזה X על l_1, נגדיר $\{Z,X\}=\alpha\cap AX$ ו$Y=BZ\cap l_2$. מה מעלת Y?

ב. נגדיר את מפת ה*Veronese* כך $v(x;y;z)=(x^2;y^2;z^2;yz;xz;xy)$

1. הוכיחו שA,B,C,D,E,F על שניונית אם ורק אם $v(A),v(B),v(C),v(D),v(E),v(F)$ על היפר-מישור.
2. בהינתן שלוש נקודות X,Y,Z ממעלות d_1,d_2,d_3, מה המעלה של מקדמי המעגל החוסם של XYZ?
3. אותו דבר כמו 2, רק נקודות אפקטיביות ומעלה אפקטיבית. (תנסו את ההכי טוב שלכם)
   1. אם X,Z קבועות וY זזה על ישר דרך X?
   2. אם Y היא הטלה של נקודה ממעלה d_2' על מעגל?

ג. נתונים שלושה מעגלים ממעלות d_1,d_2,d_3, בכמה נקודות צריך לבדוק כדי להוכיח שיש להם ציר רדיקלי משותף?

ד. נתון נקודות X,Y,Z, ממעלות d_1,d_2,d_3.
1. מה מעלת מרכז המעגל החוסם שלהן?
2. הסבירו את התוצאה השונה בחישוב באמצעות חיתוך אנכים אמצעיים ובאמצעות ב.2.

ה. נתונה שניונית ממעלת מקדמים d_1, ישר ממעלה d_2 ונקודה ממעלה d_3. נתון שהנקודה תמיד על הישר ושניונית, מה המעלה של נקודת החיתוך הנוספת של הישר והשניונית?

בדיקה בנקודות, עכשיו בדו מימד!

“Failure at some point in your life is inevitable, but giving up is unforgivable.” – Joe Biden

לעיתים נרצה לבדוק בנקודות בהזזה של נקודה במישור, לרוב הנקודה ברורה מניסוח השאלה, אך לא תמיד.

משפט האפסים של הילברט מספר לנו שעבור פולינום חסר ריבועים P (אנחנו נתעסק בעיקר בפולינומים אי פריקים) ופולינום Q, אם Q מתאפס בכל הנקודות בהן P מתאפס במרחב פרויקטיבי מרוכב, אז $P \mid Q$.

א. שכנעו את עצמכם שחישובי המעלות שנעשו בחלקים הקודמים עדיין תקפים גם כאשר הנקודות זזות בדו מימד.

ב. נתונים ישרים l_1,l_2 ממעלות d_1,d_2. נקודה $X=l_1\cap l_2$
1. מה מעלת X?
2. נו אתם יודעים...

ג. נתון משולש קבוע ABC ונקודה P ממעלה d, מה המעלה האפקטיבית של הצמודה האיזוגונלית לP?

שאלות

בדיקה חד מימדית

א. נתון משולש ABC ונקודה P על מעגלו החוסם, הוכיחו שהשיקופים של P סביב צלעות המשולש על ישר עם מפגש הגבהים שלו.

ב. נתונים מעגלים α,β שמשיקים בP, נתון משיק של α, l_1, שנחתך עם β בA,B ומשיק לα בQ. נסמן את האנך לPQ דרך Q בl_2. אנכים מA,B לl_1 נחתכים עם l_2 בC,D. הוכיחו ש$AD\cup BC$ מרכז α.

ג. נתון משולש ABC, נסמן אמצעי קשת $\widehat{BC}$ בN,S ואת חיתוך האנך מA עם המעגל החוסם בE. נסמן $D=AE\cap BN$ ו L חיתוך המקביל לBC דרך D וBE. מעגל BDL חותך את המעגל החוסם שנית בP. הוכיחו שהמשיק מP ל BDL, AS וBN נפגשים בנקודה.

בדיקה דו מימדית

ד. נתונים שלושה ישרים l_1, l_2, l_3 וישר l. האנך מ$l_1 \cap l$ לl_1 חותך את l_2, l_3 בX_2, X_3 נגדיר $X_1 = l_2 \cap l_3$, נקודות $Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$ מוגדרות באופן סימטרי, הוכיחו שלמעגלים $X_1X_2X_3, Y_1Y_2Y_3, Z_1Z_2Z_3$ ציר רדיקלי משותף.

ה. נתון משולש ABC שחסום במעגל Ω ונקודה P. נגדיר Γ להיות המעגל שעובר במרכזי המעגלים החוסמים של ABP, BCP, CAP. הוכיחו שהשיקוף של P סביב הציר הרדיקלי של Ω וΓ צמוד לP איזוגונלית.

ו. נתון משולש משוכלל ABC ונקודות על אנכיו האמצעיים בהתאמה A_1, B_1, C_1 כך ש$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°$. נגדיר $A_2 = BC_1 \cap CB_1$ ובאופן סימטרי את B_2, C_2. הוכיחו שלמעגלים $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ ציר רדיקלי משותף.